Universidad de Cantabria

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación

Trabajo dirigido en estadística y computación,

realizado para completar los estudios de

Licenciado en Matemáticas, especialidad en Estadística y Computación.

Director/a del trabajo: María Araceli Tuero Díaz

Representación de Skorokhod y Principios de Invariancia

Borja Gómez Solórzano

Santander, 1 de Julio de 2010

Índice de contenidos

1. Introducción

Consideremos el juego que consiste en lanzar una moneda y apostar un euro a cara. La variable aleatoria $\mathbf{X}_n$ vale 1 si en el n-ésimo lanzamiento el jugador gana y vale -1 si pierde. Las sumas parciales $\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$ coinciden con las ganancias del jugador en n lanzamientos. Por un lado, el Teorema Central del Límite nos da la distribución a la que convergen $\frac{\mathbf{S}_n}{\sqrt{n}}$. Por otro lado, la Ley del Arco-seno nos da la distribución límite de $\frac{\sharp\{k;\ k \leq n \colon \mathbf{S}_k > 0\}}{n}$, es decir, de la proporción del número de veces en n lanzamientos que el jugador va ganando dinero.

En ambos casos obtenemos el límite de una función de las sumas parciales. Ahora bien, el Teorema Central del Límite está siendo aplicado en un caso particular. La distribución límite es la misma partiendo de cualquier sucesión de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas de media cero y varianza uno. En este sentido podemos decir que el Teorema Central del Límite es un principio de invariancia.

Veremos que la misma extensión admite la Ley del Arco-seno, obteniéndose de nuevo un límite independiente de la distribución de partida, y por tanto un nuevo principio de invariancia. De hecho, demostraremos que todas las funciones "regulares" de las sumas parciales de una sucesión de variables independientes e igualmente distribuidas de esperanza cero y varianza finita tienen el mismo límite.

El resultado se obtiene a partir del teorema de Donsker, que viene a ser una generalización del Teorema Central del Límite para procesos. A partir de las sumas parciales se construye un proceso que converge en ley al Movimiento Browniano. Componiendo con distintas funciones f casi seguro B-continuas (La continuidad está referida a cierta métrica y el casi seguro a la probabilidad generada por el Movimiento Browniano) obtenemos diversos principios de invariancia. En cada caso la distribución límite será la distribución de la función que estemos considerando aplicada al Movimiento Brownianio. Normalmente se suele calcular directamente del movimiento Browniano o mediante argumentos combinatorios que tienen que ver con el lanzamiento de una moneda, como es el caso del teorema del arco-seno.

Demostramos el Teorema de Invariancia de Donsker para sumas de variables aleatorias independientes en la versión de trayectorias con discontinuidad de salto basándonos en la Representación de Skorokhod. Este método tiene a su favor suprimir una gran cantidad de problemas topológicos. Si bien la versión con trayectorias continuas puede demostrarse en términos de convergencia débil en $C[0,1]$ sin excesivos problemas, no es así para trayectorias con discontinuidad de salto. En efecto, $D[0,1]$ no es separable con la métrica uniforme, lo que hace que la mayoría de los autores manejen la métrica de Skorokhod de mayor complejidad topológica. A través de la Representación de Skorokhod no interviene para nada la medibilidad al venir dado el enunciado del Teorema de Invariancia en términos de convergencia de distancias a cero. La distancia referida es, además, la uniforme.

Una pieza clave de la demostración es la inmersión de una sucesión de sumas parciales en un movimiento Browniano. Esa inmersión se sirve de la idea de tiempo de salida. Básicamente un tiempo de salida se puede definir como el primer tiempo en el que la trayectoria de una partícula abandona la región del plano limitada por dos barreras. Lo que ocurre es que las sumas de v.a.i.i.d.'s se pueden "representar" mediante una sucesión de procesos definidos en función de ciertos tiempos de salida que a su vez dependen de unas "barreras aleatorias". Una parte importante para realizar la inmersión es escoger las barreras aleatorias para que las sumas y los movimientos Brownianos estén igualmente distribuidos. En la literatura se exponen diferentes formas de realizar esto.

La importancia de los principios de invariancia se manifiesta también en el cálculo de la distribución límite del estadístico de Kolmogorov-Smirnov. Dicho estadístico se usa para averiguar si ciertos datos vienen de una distribución teórica (continua) o no.

Del Teorema de Representación de Skorokhod se deduce una demostración relativamente sencilla de la Ley del Logaritmo Iterado para caminatas aleatorias, que será un nuevo principio de invariancia, en este caso para convergencia casi seguro.

2. El Teorema de Representación de Sumas

Dentro de los procesos estocásticos cabe destacar un proceso en tiempo continuo conocido con el nombre de movimiento Browniano. En realidad movimiento Browniano es el nombre que se le da al modelo físico, la formulación matemática recibe el nombre de proceso de Wiener, por eso en algunos libros se lo denota por W. Como en la mayor parte de la literatura se lo llama movimiento Browniano aquí para no confundir también lo llamaremos así.

El movimiento Browniano describe la proyección sobre un eje del movimiento de una partícula suspendida en un fluido y sometida a bombardeo molecular. $\mathbf{X}_t(\omega)$ denotará la posición de la partícula en el tiempo t. En función de su significado físico es razonable exigir al proceso $\{\mathbf{X}_t : \ t \in [0, \infty)\}$ que verifique las condiciones siguientes

1. Independencia.
2. Estacionalidad. Quiere decir que la distribución de $\mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{X}_t$ no depende de t sino de Δt.
3. Continuidad.

Definición 2.1 (Movimiento Browniano)**.** Se llama movimiento Browniano a un proceso estocástico $[\mathbf{X}_t : \ t \geq 0]$ para el cual $\mathbf{X}_0 \equiv 0$ y la distribución conjunta de $(\mathbf{X}_{t_0}, \mathbf{X}_{t_1}, \ldots, \mathbf{X}_{t_n})$ para $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ es una normal multidimensional con

1. $E\mathbf{X}_{t_k} = \mu t_k$
2. $Var\mathbf{X}_{t_k} = \sigma^2 t_k$
3. $Cov(\mathbf{X}_{t_j}, \mathbf{X}_{t_k}) = \sigma^2 \min\{t_j, t_k\}$

La anterior definición de movimiento Browniano cumple las exigencias del modelo físico.

A continuación, una definición importante.

Definición 2.2 (Tiempo de salida)**.** Sean $\{\mathbf{X}_t\}$ movimiento Browniano y $\mathbf{B} \in \beta$, llamamos tiempo de salida de $\mathbf{X}_t$ del conjunto $\mathbf{B}$ a

$$\mathbf{t}^*(\mathbf{B}) = \text{ínf}\{t; \mathbf{X}_t \in \mathbf{B}^c\}$$

Si $\mathbf{B} = (a, b)$, $\mathbf{t}^*(a, b)$ es el primer tiempo en el que la partícula sale del intervalo (a, b).

Hemos definido el tiempo de salida de un intervalo como el primer tiempo en el que la partícula sale de (a, b). ¿Qué pasa cuando los extremos del intervalo son variables aleatorias?, ¿será también variable aleatoria?

Lema 2.3. *Sean* $\mathbf{X}_t$ *movimiento Browniano definido en* $(\Omega, \ \sigma)$ *y* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *definidas en* $(\Omega, \ \sigma)$*, entonces*

$$\mathbf{T} = \underset{t}{\text{ínf}}\{\mathbf{X}_t \notin (\mathbf{U}, \mathbf{V})\}$$

es v.a..

Demostración.

$$\mathbf{T}^{-1}(0, s] = \left\{ \underset{0 \leq t \leq s}{\text{ínf}} \mathbf{X}_t \leq \mathbf{U} \right\} \cup \left\{ \sup_{0 \leq t \leq s} \mathbf{X}_t \geq \mathbf{V} \right\}$$

Como $\{\text{ínf}_{0 \leq t \leq s} \mathbf{x}_t \leq \mathbf{u}\} = (\text{ínf}_{0 \leq t \leq s} \mathbf{x}_t - \mathbf{u})^{-1} (-\infty, 0]$, $\text{ínf}_{0 \leq t \leq s} \mathbf{x}_t = \text{ínf}_{0 \leq t_n \leq s} \mathbf{x}_{t_n}$, donde t_n es un conjunto numerable denso en $[0, s]$ y el ínfimo de una sucesión de variables aleatorias es variable aleatoria $(\text{ínf}_{0 \leq t \leq s} \mathbf{X}_t - \mathbf{U})^{-1} (-\infty, 0] \in \sigma$. Lo mismo ocurre con el supremo, se sigue que $\mathbf{T}$ es variable aleatoria. □

Definición 2.4 (Tiempo de parada)**.** Sea $\{\mathbf{X}_t\}$ un movimiento Browniano, una variable aleatoria $\mathbf{t}^* \geq 0$ se dice que es un tiempo de parada si para cada $t \geq 0$,

$$\{\mathbf{t}^* \leq t\} \in \sigma\left[\mathbf{X}_\tau,\, \tau \leq t\right]$$

Es decir, si $\mathbf{t}^*$ solo depende de las trayectorias del movimiento Browniano hasta el tiempo $\mathbf{t}^*$.

Más adelante probaremos ciertas proposiciones en las que se habla de tiempo de parada refiriéndose a tiempo de salida. Resulta que un tiempo de salida también es un tiempo de parada, como se demuestra en el siguiente

Lema 2.5. *Sea $a < 0 < b$. El tiempo de salida del conjunto (a, b), $\mathbf{t}^*$, es un tiempo de parada.*

Demostración. Hay que ver que $[\mathbf{t}^* \leq t] \in \sigma\left[\mathbf{X}_s : s \leq t\right] \forall t > 0$. Para ello veremos que

$$[\mathbf{t}^* \leq t] = \bigcap_n \left[\bigcup_{\substack{s \leq t \\ s \in \mathbf{Q}}} \left[\mathbf{X}_s \in \left[a + \frac{1}{n}, \quad b - \frac{1}{n} \right]^c \right] \right]$$

Ahora

$$\omega \in \bigcap_n \left[\bigcup_{\substack{s \leq t \\ s \in \mathbf{Q}}} \left[\mathbf{X}_s \in \left[a + \frac{1}{n}, \quad b - \frac{1}{n} \right]^c \right] \right]$$

equivale a

$$\forall\, n \in \mathbf{N}\ \exists\ s^n \in \mathbf{Q},\ s^n \leq t \text{ t.q } \mathbf{X}_{s^n}(\omega) \in \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]^c$$

Veamos en primer lugar, que

$$[\mathbf{t}^* \leq t] \subseteq \bigcap_n \left[\bigcup_{\substack{s \leq t \\ s \in \mathbf{Q}}} \left[\mathbf{X}_s \in \left[a + \frac{1}{n}, \quad b - \frac{1}{n} \right]^c \right] \right]$$

Sea ω tal que $\mathbf{t}^*(\omega) \leq t$. Si $\mathbf{t}^*(\omega)$ es racional, la inclusión es obvia. Si $\mathbf{t}^*(\omega)$ no es racional tenemos que discutir dos casos.

1. $\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*(\omega)}(\omega) \in [a,b]^c$

   Por la continuidad de las trayectorias, existe s racional $s \leq t$ tal que $\mathbf{X}_s(\omega) \in [a,b]^c$, como $[a,b]^c \subset \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]^c$ tenemos lo que queríamos.

2. $\mathbf{X}(\omega)_{\mathbf{t}^*(\omega)} = a$ ó $\mathbf{X}(\omega)_{\mathbf{t}^*(\omega)} = b$

   Por la continuidad de las trayectorias

$$\exists\ \delta_n > 0 \text{ tal que si } |\mathbf{t}^*(\omega) - s| < \delta_n \Longrightarrow \left|\mathbf{X}(\omega)_{\mathbf{t}^*(\omega)} - \mathbf{X}_s\right| < \frac{1}{n}$$

   Como $\mathbf{Q}$ es denso en $\mathbf{R}$, $\exists\ s^n \in \mathbf{Q}$ tal que $|\mathbf{t}^*(\omega) - s^n| < \delta_n$.

$$-\frac{1}{n} < \mathbf{X}(\omega)_{s^n} - \mathbf{X}(\omega)_{\mathbf{t}^*(\omega)} < \frac{1}{n} \Longrightarrow \mathbf{X}(\omega)_{\mathbf{t}^*(\omega)} - \frac{1}{n} < \mathbf{X}(\omega)_{s^n} < \frac{1}{n} + \mathbf{X}(\omega)_{\mathbf{t}^*(\omega)}$$

   Por hipótesis $\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = a$ ó $\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = b$, por tanto $b - \frac{1}{n} < \mathbf{X}_{s^n}$ ó $\mathbf{X}_{s^n} < \frac{1}{n} + a$ $\forall\ n \in \mathbf{N}$. Así pues $\mathbf{X}(\omega)_s \in \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]^c$ $\forall\ n \in \mathbf{N}$, y tenemos lo que queríamos.

Para ver el contenido contrario, tomamos

$$\omega \in \bigcap_n \left[\bigcup_{\substack{s\leq t\\ s\in\mathbf{Q}}} \left[\mathbf{X}_s \in \left[a+\frac{1}{n}, \quad b-\frac{1}{n}\right]^c\right]\right]$$

Sea $(s_n)_n$ una sucesión de racionales en $[0,t]$ que verifican que $\mathbf{X}_{s_n}(\omega) \in \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]^c$. t está fijado, como $[0,t]$ es compacto, existe una subsucesión convergente $s_{n_k} \longrightarrow s \in [0,t]$, puedo tomar la subsucesión cumpliendo $\mathbf{X}(\omega)_{s_{n_k}} > b - \frac{1}{n_k}$ (igual para $\mathbf{X}(\omega)_{s_{n_k}} < a + \frac{1}{n_k}$). $\mathbf{X}(\omega)_{s_{n_k}} \longrightarrow \mathbf{X}(\omega)_s$ (por continuidad de las trayectorias) y entonces $\mathbf{X}(\omega)_s \geq b$ y $\mathbf{t}^*(\omega) \leq s < t$. $\square$

Ahora unos lemas previos necesarios para demostrar la proposición (2.10).

Lema 2.6. *Sea $\tau \geq t$*

1. $\mathbf{I}_{\mathbf{t}^*=t}$ *y* $\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t$

2. $\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{t}^*=t}$ *y* $\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t$

son variables aleatorias independientes.

Demostración. Hemos visto que $\mathbf{t}^*$ es un tiempo de parada. Por definición de tiempo de parada $[\mathbf{t}^* \le t] \in \sigma[\mathbf{X}_s : s \le t]$. Vamos ahora a ver que $[\mathbf{t}^* = t] \in \sigma[\mathbf{X}_s : s \le t]$.

$$\left[\mathbf{t}^* \le t - \frac{1}{n}\right] \in \sigma\left[\mathbf{X}_s : s \le t - \frac{1}{n}\right] \subset \sigma[\mathbf{X}_s : s \le t]$$

$$[\mathbf{t}^* < t] = \bigcap_n \left[\mathbf{t}^* \le t - \frac{1}{n}\right] \in \sigma[\mathbf{X}_s : s \le t]$$

Por tanto,

$$[\mathbf{t}^* = t] = [\mathbf{t}^* \le t] \cap [\mathbf{t}^* < t]^c \in \sigma[\mathbf{X}_s : s \le t]\,. \tag{1}$$

Por definición de movimiento Browniano $\sigma[\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t]$ es independiente de $\sigma[\mathbf{X}_s : s \le t]$.

Por otro lado como $\sigma\left[\mathbf{I}_{[\mathbf{t}^*=t]}\right] = \{\emptyset, \mathbf{R}, [\mathbf{t}^* = t], [\mathbf{t}^* = t]^c\}$, y puesto que $[\mathbf{t}^* = t]^c \in \sigma[\mathbf{X}_s : s \le t]$, se sigue que $\sigma\left[\mathbf{I}_{[\mathbf{t}^*=t]}\right] \subset \sigma[\mathbf{X}_s : s \le t]$, y por tanto $\sigma[\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t]$ es independiente de $\sigma\left[\mathbf{I}_{[\mathbf{t}^*=t]}\right]$, de donde se deduce que $\mathbf{I}_{\mathbf{t}^*=t}$ y $\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t$.

Veamos que $\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{t}^*=t}$ y $\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t$ son independientes. Un elemento de $\sigma\left[\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{I}_{\{\mathbf{t}^*=t\}}\right]$ será de la forma $\left(\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{I}_{\{\mathbf{t}^*=t\}}\right)^{-1}(A)$ para algún $A \in \beta$. Ahora bien

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{I}_{\{\mathbf{t}^*=t\}} \in A\right] &= \left\{\omega / \mathbf{t}^*(\omega) = t,\ \mathbf{X}(\omega)_t \cdot \mathbf{I}(\omega)_{\{\mathbf{t}^*=t\}} \in A\right\} \\
&\cup \left\{\omega / \mathbf{t}^*(\omega) \ne t,\ \mathbf{X}(\omega)_t \cdot \mathbf{I}(\omega)_{\{\mathbf{t}^*=t\}} \in A\right\} \\
&= \begin{cases} ([\mathbf{t}^* = t] \cap [\mathbf{X}_t \in A]) \cup [\mathbf{t}^* = t]^c & \text{si } 0 \in A \\ ([\mathbf{t}^* = t] \cap [\mathbf{X}_t \in A]) & \text{si } 0 \notin A \end{cases}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (1), $\sigma\left[\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{I}_{\{\mathbf{t}^*=t\}}\right] \subset \sigma[\mathbf{X}_s :\ s \le t]$. Por definición de movimiento Browniano $\mathbf{X}_t \cdot \mathbf{I}_{\{\mathbf{t}^*=t\}}$ y $\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t$ son independientes. □

Proposición 2.7. *Sea* T_0 *una colección finita de puntos* $0 = t_0 \le t_1 < \ldots < t_n = \tau$*;*

entonces para un movimiento browniano normalizado $\mathbf{X}_t$

$$P\left(\max_{t\in T_0}|\mathbf{X}_t|>x\right)\leq 2P\left(|\mathbf{X}_\tau|>x\right)$$

Lema 2.8. *Sea* $\mathbf{X}$ *una v.a. positiva. Entonces*

$$E\mathbf{X}=\int_0^\infty P[\mathbf{X}>t]\ dt$$

Lema 2.9. *Sean* $\mathbf{X}_t$ *un movimiento browniano normalizado y* $\tau\in\mathbb{R}$*, entonces*

$$E\sup_{t\leq\tau}\mathbf{X}_t^2<\infty$$

Demostración. Primero observemos que como $[0,\tau]$ es compacto y las trayectorias son continuas, podemos cambiar sup por máx. Veamos primero que $\max_{t\leq\tau}\mathbf{X}_t^2$ es v.a.

Sea $t_0=0$, $\mathbb{Q}\cap[0,\tau]=\{t_j\}_{j=1}^\infty=I_0$, $I_0^n=\{t_0,\ldots,t_n\}$ $\max_{t\in I_0^n}\mathbf{X}_t^2$ es v.a.. Si llamamos $\mathbf{Y}_n=\max_{t\in I_0^n}\mathbf{X}_t^2$ e $\mathbf{Y}=\max_{t\leq\tau,\ t\in I_0}\mathbf{X}_t^2$ tenemos que $\mathbf{Y}_n\longrightarrow\mathbf{Y}\ \forall\omega\in\Omega$, por tanto es v.a., porque es límite de v.a.'s. Pero $\mathbf{Y}=\max_{t\leq\tau}\mathbf{X}_t^2$, por continuidad.

Probemos que $E\max_{t\in I_0^n}\mathbf{X}_t^2<\infty$, (2.7).

$$\begin{aligned}\max_{t\in I_0^n}|\mathbf{X}_t|>x &\iff |\mathbf{X}_t|>x\ \text{ para algún } t\in\ I_0\\ &\iff |\mathbf{X}_t|^2>x^2 \text{ para algún } t\in\ I_0\\ &\iff \max_{t\in I_0^n}|\mathbf{X}_t|^2>x^2\end{aligned}$$

la segunda equivalencia es porque $f(x)=x^2$ es creciente para $x\geq 0$. Luego por la anterior proposición $\mathrm{P}\left[\max_{t\in I_0^n}\mathbf{X}_t^2>x^2\right]\leq 2\mathrm{P}\left[|\mathbf{X}_{t_n}|>x\right]$. Escribiendo la esperanza como en (2.8)

$$E\max_{t\in I_0^n}\mathbf{X}_t^2=\int_0^\infty \mathrm{P}\left[\max_{t\in I_0^n}\mathbf{X}_t^2>x\right]dx$$

Hacemos el cambio de variable $x = y^2$. Teniendo en cuenta la proposición (2.7)

$$\begin{aligned}
E \max_{t \in I_0^n} \mathbf{X}_t^2 &= \int_0^\infty 2y\mathrm{P}\left[\max_{t \in I_0^n} \mathbf{X}_t^2 > y^2\right] dy \leq 4\int_0^\infty y\mathrm{P}\left[|\mathbf{X}_{t_n}| > y\right] dy \\
&= 4\int_0^\infty y\mathrm{P}\left[\frac{\mathbf{X}_{t_n}}{\sqrt{t_n}} > \frac{y}{\sqrt{t_n}}\right] dy = 2\int_0^\infty \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{y}{\sqrt{t_n}}}^\infty y\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz\right) dy \\
&\leq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left(\int_{\frac{y}{\sqrt{t_n}}}^\infty \sqrt{t_n} z\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz\right) dy \\
&= 2\sqrt{\frac{2t_n}{\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2t_n}\right) dy = 2\sqrt{\frac{2t_n}{\pi}}\frac{\sqrt{2\pi t_n}}{2} = 2t_n \leq 2\tau < \infty
\end{aligned}$$

Recapitulando, $\mathbf{Y}_n \uparrow \mathbf{Y}$, donde $\mathbf{Y}_n$, $\mathbf{Y}$ son las definidas anteriormente, como acabamos de ver $E\mathbf{Y}_n < \infty$. Así que, por el tma. de la Convergencia Monótona

$$E\mathbf{Y}_n \xrightarrow{c.s} E\mathbf{Y}$$

y como acabamos de ver $E\mathbf{Y}_n \leq 2\tau$, por tanto $E\mathbf{Y} \leq 2\tau$. $\square$

La siguiente proposición se utiliza directamente en la demostración del Teorema de Representación de Skorokhod, e indirectamente para probar otra proposición previa a dicho Teorema, la (2.13).

Proposición 2.10. *Para* $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}^*(a,b), \quad a < 0 < b,$

$$E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = 0, \quad E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}^2 = E\mathbf{t}^*$$

Demostración .

1)

Supongamos que $\mathbf{t}^*$ es un tiempo de parada que toma valores en un conjunto numerable $\{t_j\} \subset [0,\tau]$, $\tau < \infty$. Entonces

$$E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right) = E\left(\sum_j \left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)\mathbf{I}_{\mathbf{t}^*=t_j}\right)$$

Aplicando el lema (2.6) la parte derecha de la ecuación queda

$$\sum_j \left[E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_j}\right)\right] \mathrm{P}(\mathbf{t}^* = t_j)$$

que es cero, porque $\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_j},\ \tau > 0$ es un movimiento Browniano normalizado. Entonces

$$E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = E\mathbf{X}_\tau = 0$$

Veamos la segunda parte.

$$\begin{aligned} E\mathbf{X}_\tau^2 &= E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} + \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)^2 = E\left[\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)^2 + \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}^2 + 2\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right] \\ &= E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)^2 + E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}^2 + 2E\left[\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right] \\ &= E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)^2 + E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

porque $E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = 0$, veámoslo.

$$\begin{aligned} E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} &= \left(E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)\sum_j \mathbf{I}_{\{\mathbf{t}^*=t_j\}} \\ &= E\sum_j \left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_j}\right)\mathbf{X}_{t_j}\mathbf{I}_{\{\mathbf{t}^*=t_j\}} \\ &= \sum_j E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_j}\right)\mathbf{X}_{t_j}\mathbf{I}_{\{\mathbf{t}^*=t_j\}} \\ &= \sum_j E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_j}\right)E\left(\mathbf{X}_{t_j}\mathbf{I}_{\{\mathbf{t}^*=t_j\}}\right) = 0 \end{aligned}$$

la anteúltima igualdad es cierta por el lema (2.6). Por otro lado

$$\begin{aligned} E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\right)^2 &= E\left(\sum_j \left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_j}\right)^2 \mathbf{I}_{\mathbf{t}^*=t_j}\right) \\ &\overset{*}{=} \sum_j E\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_j}\right)^2 \mathrm{P}(\mathbf{t}^* = t_j) \\ &= \sum_j Var\left(\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_j}\right)\mathrm{P}(\mathbf{t}^* = t_j) = \sum_j (\tau - t_j)\mathrm{P}(\mathbf{t}^* = t_j) \\ &= \tau\sum_j \mathrm{P}(\mathbf{t}^* = t_j) - \sum t_j \mathrm{P}(\mathbf{t}^* = t_j) = E\mathbf{X}_\tau^2 - E\mathbf{t}^* \end{aligned} \tag{3}$$

En $*$ hemos usado el lema (2.6). De (2) y (3) obtenemos que $E\mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^*} = E_{\mathbf{t}^*}$.

2)

Sea $\mathbf{t}^{**} = \text{mín}\,(\mathbf{t}^*(a,b),\tau)\,,\ \mathbf{t}^*_n$. Tomamos una sucesión de tiempos de parada que toman una cantidad numerable de valores en $[0,\tau]$ tal que $\mathbf{t}^*_n \longrightarrow \mathbf{t}^{**}$ en todo punto, entonces $\mathbf{t}^*_n \xrightarrow{c.s} \mathbf{t}^{**}$ y $|\mathbf{t}^*_n| \leq \tau$, ($\tau$ v.a., porque es constante) y $E\tau = \tau < \infty$; por el teorema de la convergencia dominada

$$E\mathbf{t}^*_n \longrightarrow E\mathbf{t}^{**}. \tag{4}$$

Además, por continuidad de las trayectorias del movimiento Browniano, si $\mathbf{t}^*_n \longrightarrow \mathbf{t}^{**} \Longrightarrow \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*_n} \longrightarrow \mathbf{X}_{\mathbf{t}^{**}}$, por tanto $\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*_n} \xrightarrow{c.s} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^{**}}$, además

$$\left|\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*_n}\right| \leq \sup_{t\leq\tau} |\mathbf{X}_t|$$

se hace de un modo similar a (2.9), $\sup_{t\leq\tau} |\mathbf{X}_t|$ es integrable por el T.C.D.

$$E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*_n} \longrightarrow E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^{**}}. \tag{5}$$

Como

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

es continua se sigue que $\mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^*_n} \xrightarrow{c.s} \mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^{**}}$, y usando

$$\left|\mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^*_n}\right| \leq \sup_{t\leq\tau} \mathbf{X}^2_t$$

por (2.9), $\sup_{t\leq\tau} \mathbf{X}^2_t$ es integrable. De nuevo por el T.C.D.

$$E\mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^*_n} \longrightarrow E\mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^{**}}. \tag{6}$$

Obtenemos por el paso **1)** y (4), (5), (6) que

$$\begin{aligned} E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^{**}} &= 0 \\ E\mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^{**}} &= E\mathbf{t}^{**} \end{aligned}$$

3)

Sea $\mathbf{t}^{**}{}_n = \text{mín}(\mathbf{t}^*(a,b), \tau_n)$, donde $(\tau_n)_n$ define una sucesión creciente de intervalos $[0, \tau_n]$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^{**}{}_n} d\text{P} = \int \mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* \leq \tau_n]} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} d\text{P} + \int \mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* > \tau_n]} \mathbf{X}_{\tau_n} d\text{P}$$

Vamos ahora a aplicar el T.C.D. Sean $k = \text{máx}(|a|, |b|)$ y $\mathbf{X}^1_n = \mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* \leq \tau_n]} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}$ Tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{X}^1_n| \leq k \\ \mathbf{X}^1_n \xrightarrow{c.s} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} \end{array} \right\} E\mathbf{X}^1_n \longrightarrow E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}$$

Veamos que $\mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* \leq \tau_n]} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} \xrightarrow{c.s} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}$. Sea ω t.q $\mathbf{t}^*(\omega) \leq \tau_n$ $\forall n \geq n_0$, entonces $\mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* \leq \tau_n]} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}$ $\forall n \geq n_0$, por tanto $\mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* \leq \tau_n]} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} \xrightarrow{n} \mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}$. Sea ahora $\mathbf{X}^2_n = \mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* > \tau_n]} \mathbf{X}_{\tau_n}$, volviendo a aplicar el T.C.D.

$$\left. \begin{array}{l} |\mathbf{X}^2_n| \leq k \\ \mathbf{X}^2_n \xrightarrow{c.s} 0 \end{array} \right\} E\mathbf{X}^2_n \longrightarrow E\,0 = 0$$

Veamos que $\mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* > \tau_n]} \mathbf{X}_{\tau_n} \xrightarrow{c.s} 0$. Sea ω t.q $\mathbf{t}^*(\omega) > \tau_n$ $\forall n \geq n_0$, entonces $\mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* > \tau_n]} \mathbf{X}_{\tau_n} = 0$ $\forall n \geq n_0$, por tanto $\mathbf{I}_{[\mathbf{t}^* > \tau_n]} \mathbf{X}_{\tau_n} \xrightarrow{n} 0$. Por (2) $E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^{**}{}_n} = E\mathbf{X}^1_n + E\mathbf{X}^2_n$, luego

$$E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^{**}{}_n} \xrightarrow{c.s} E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}. \tag{7}$$

Del mismo modo se prueba que

$$E\mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^{**}{}_n} \xrightarrow{c.s} E\mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^*}. \tag{8}$$

Ahora pasamos de $\mathbf{t}^{**}$ a $\mathbf{t}^{*}$. Como $E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^{**}n} = 0$ por el paso **2)** y (7), entonces $E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^{*}} = 0$. Para probar el otro resultado vamos a echar mano del teorema de la convergencia monótona.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{t}_n^{**} \xrightarrow{c.s} \mathbf{t}^{*} \\ \mathbf{t}_n^{**} \leq \mathbf{t}_{n+1}^{**} \end{array}\right\} \stackrel{T.C.M.}{\Longrightarrow} \quad E\mathbf{t}_n^{**} \longrightarrow E\mathbf{t}^{*} \tag{9}$$

se sigue que $E\mathbf{X}_{\mathbf{t}^{*}}^2 = E\mathbf{t}^{*}$, por el paso **2)**, (8) y (9). □

Lema 2.11. *Sean u, $v \in \mathbb{R}$, sea $\mathbf{Y}$ una v.a. tal que*

$$P[\mathbf{Y} = u] + P[\mathbf{Y} = v] = 1 \quad E\mathbf{Y} = 0$$

entonces

$$P[\mathbf{Y} = u] = \frac{-v}{u-v}, \quad P[\mathbf{Y} = v] = \frac{u}{u-v}$$

Demostración.

$$E\mathbf{Y} = u\mathrm{P}[\mathbf{Y} = u] + v(1 - \mathrm{P}[\mathbf{Y} = u]) = 0$$

entonces

$$\mathrm{P}[\mathbf{Y} = u] = \frac{-v}{u-v}, \quad \mathrm{P}[\mathbf{Y} = v] = 1 - \frac{-v}{u-v} = \frac{u}{u-v}$$

□

Corolario 2.12. *Dos v.a.'s en las hipótesis del lema anterior (y que toman los mismos valores) están igualmente distribuidas.*

Demostración. Es porque las probabilidades coinciden, por el lema anterior. □

La información que necesitamos acerca del tiempo de salida para probar resultados más importantes, como el Teorema de Representación de Skorokhod, es la probabilidad de que la partícula salga primero por b (o por a) y el tiempo de salida esperado.

Proposición 2.13. *Sea* $\{\mathbf{X}_t\}$ *un movimiento Browniano y* $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}^*(a,b)$ *un tiempo de salida. Se cumple que*

$$P(\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = a) = \frac{|a|}{|b|+|a|}, \; P(\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = b) = \frac{|b|}{|b|+|a|}, \; E\mathbf{t}^*(a,b) = |a||b|$$

Demostración. La primera parte es corolario del lema (2.11). Ahora por la proposición (2.10)

$$\begin{aligned} E\mathbf{t}^* &= E\mathbf{X}^2_{\mathbf{t}^*} = a^2 \mathrm{P}(\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = a) + b^2 \mathrm{P}(\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*} = b) \\ &= a^2 \frac{b}{b-a} + b^2 \frac{a}{a-b} = ab\left[\frac{a}{b-a} + \frac{b}{a-b}\right] \\ &= -ab = |a| \cdot |b| \end{aligned}$$

□

En nuestro desinteresado afán por intentar que la lectura sea lo menos traumática para el lector, hemos decidido trocear el dichoso Teorema de Representación de Sumas. Servimos a continuación una serie de herramientas necesarias para la comprensión de la demostración.

Lema 2.14. *Sea* I *subconjunto numerable de* $[0,\infty)$.

Las siguientes aplicaciones son variables aleatorias.

$$\begin{array}{llll} \psi_1 : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v,x) & \longmapsto & u \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \psi_2 : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v,x) & \longmapsto & v \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \varphi_\tau : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v,x) & \longmapsto & x_\tau \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \hat{\varphi} : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & (u,v,x) & \longmapsto & \sup_{\tau\in I} x_\tau - v \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \hat{\hat{\varphi}} : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & (u,v,x) & \longmapsto & \text{ínf}_{\tau\in I} x_\tau - u \end{array}$$

Demostración. ψ_1 y ψ_2 son proyecciones y por tanto variables aleatorias.

Sea

$$\begin{array}{rlcl}\Pi_\tau : & \left(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \beta\left(\mathbb{R}^{[0,\infty)}\right)\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \beta) \\ & x & \longmapsto & x_\tau\end{array}$$

Π_τ es v.a. con $\beta\left(\mathbb{R}^{[0,\infty)}\right) = \sigma\{\Pi_\tau : \tau \in [0,\infty)\}$

Sea $A \in \beta$

$$\begin{aligned}\varphi_\tau^{-1}(A) &= \{(u,v,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} / \varphi_\tau(u,v,x) \in A\} \\ &= \{(u,v,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} / x_\tau \in A\} \\ &= \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Pi_\tau^{-1}(A)\end{aligned}$$

y obtenemos que φ es variable aleatoria.

Que φ y $\hat{\varphi}$ son v.a.'s se deduce de que $\sup_{\tau\in I}\varphi_\tau$ e $\inf_{\tau\in I}\varphi_\tau$ son v.a.'s.

Lo mismo ocurre con $\widehat{\varphi_n}$, y $\widehat{\hat{\varphi}}$ □

Notación 2.15. Sea $I = \{t_n / n \in \mathbb{N}\}$ numerable, denso en $[0,\infty)$

$$\begin{array}{rlcl}\hat{\varphi}_n : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & (u,v,x) & \longmapsto & \sup_{\substack{0\le\tau\le t_n \\ \tau\in I}} x_\tau - v \\ \hat{\hat{\varphi}}_n : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & (u,v,x) & \longmapsto & \inf_{\substack{0\le\tau\le t_n \\ \tau\in I}} x_\tau - u\end{array}$$

Para $B \in \beta$, definimos

$$\begin{aligned}A_B &= \left[\bigcup_n \left[(\hat{\varphi}_n^{-1}[0,\infty)) \cap (\hat{\hat{\varphi}}_n^{-1}(0,\infty))\right] \cap \left[\psi_2^{-1}(B)\right]\right] \\ &\cup \left[\bigcup_n \left[(\hat{\varphi}_n^{-1}(-\infty,0)) \cap (\hat{\hat{\varphi}}_n^{-1}(-\infty,0])\right] \cap \left[\psi_1^{-1}(B)\right]\right]\end{aligned}$$

Lema 2.16. *Dado un movimiento Browniano* $\mathbf{X}_t$ *y* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *variables aleatorias con* $\mathbf{U} \le 0 \le \mathbf{V}$*, denotando*

$$\mathbf{T} = \inf\{t : \mathbf{X}_t \notin (U, V)\}$$

se cumple

$$\begin{aligned} P[\mathbf{X_T} \in B] &= P[(\mathbf{U},\, \mathbf{V},\, \mathbf{X}) \in A_B] \\ P[\mathbf{T} \in (0,s]] &= P\left[\bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ t_n\geq s}} \Big(\hat{\varphi}_n^{-1}[0,\infty) \cup \hat{\hat{\varphi}}_n^{-1}(-\infty,0]\Big)\right] \end{aligned}$$

Demostración. Sea $I = \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ numerable, denso en $[0,\infty)$. Comenzaremos probando que $\Omega = A \cup D \cup (A\cup D)^c$, donde

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_n \left[\left(\sup_{\substack{0\leq\tau\leq t_n\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau \geq \mathbf{V}\right) \cap \left(\inf_{\substack{0\leq\tau\leq t_n\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau > \mathbf{U}\right)\right] \\ D &= \bigcup_n \left[\left(\sup_{\substack{0\leq\tau\leq t_n\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau < \mathbf{V}\right) \cap \left(\inf_{\substack{0\leq\tau\leq t_n\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau \leq \mathbf{U}\right)\right] \end{aligned}$$

¿Qué relación existe entre A y D?

A equivale a $\exists\, t_{n_0}$ tal que $\sup_{\substack{0\leq\tau\leq t_{n_0}\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau \geq \mathbf{V}$ e $\inf_{\substack{0\leq\tau\leq t_{n_0}\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau > \mathbf{U}$. B equivale a $\exists\, t_{n_1}$ tal que $\sup_{\substack{0\leq\tau\leq t_{n_1}\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau < \mathbf{V}$ y $\inf_{\substack{0\leq\tau\leq t_{n_1}\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau \leq \mathbf{U}$.

Si $t_0 \leq t_1$. Si $\omega \in A$ y $\omega \in D$, por un lado $\inf_{\substack{0\leq\tau\leq t_{n_0}\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau > \mathbf{U}$ y por otro lado $\inf_{\substack{0\leq\tau\leq t_{n_1}\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau \leq \mathbf{U}$, lo cual es absurdo.

Si $t_0 \geq t_1$. Si $\omega \in A$ y $\omega \in D$, por un lado $\sup_{\substack{0\leq\tau\leq t_{n_0}\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau \geq \mathbf{V}$ y por otro lado $\sup_{\substack{0\leq\tau\leq t_{n_1}\\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau < \mathbf{V}$, lo cual es también absurdo. De donde se sigue que $A \cap D = \emptyset$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left[\mathbf{X_T} \in B\right] &= \mathrm{P}\left[([\mathbf{X_T} \in B] \cap A) \cup ([\mathbf{X_T} \in B] \cap D)\right] \\ &+ \mathrm{P}\left[[\mathbf{X_T} \in B] \cap (A\cup D)^c\right] \\ &= \mathrm{P}\left[([\mathbf{V} \in B] \cap A) \cup ([\mathbf{U} \in B] \cap D)\right] \\ &+ \mathrm{P}\left[[\mathbf{X_T} \in B] \cap (A\cup D)^c\right] \end{aligned}$$

Veremos que el conjunto $\{\omega : \mathbf{X}_t(\omega) \in (\mathbf{U}(\omega),\, \mathbf{V}(\omega))\}$ tiene probabilidad cero, es decir, que casi seguro que la trayectoria se sale de las barreras. Para verlo usaremos la Ley del Logaritmo Iterado para el movimiento Browniano, que dice lo siguiente:

Si $\mathbf{X}_t$ es un movimiento Browniano.

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mathbf{X}_t}{\sqrt{2t\log(\log t)}} \overset{c.s.}{=} 1$$

Sea $\omega \in \Omega$, entonces $\mathbf{U}(\omega) = a$ y $\mathbf{V}(\omega) = b$ por tanto se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{X}_t}{\sqrt{2t\log(\log t)}} \overset{c.s.}{=} 0$$

porque suponemos por hipótesis que la trayectoria no sale del intervalo (a, b). Como existe límite tanto el límite superior como el inferior tienen que coincidir y ser cero, lo cual contradice la Ley del Logaritmo Iterado. Por tanto

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{X_T} \in B\right] = \mathrm{P}\left[\left(\left[\mathbf{V} \in B\right] \cap A\right) \cup \left(\left[\mathbf{U} \in B\right] \cap D\right)\right]$$

Vayamos por partes:

1. Tomamos

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_n: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & (u, v, x) & \longmapsto & \sup_{\substack{0\le\tau\le t_n \\ \tau\in I}} x_\tau - v \\ \hat{\varphi}_n: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{[0,\infty)} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ & (u, v, x) & \longmapsto & \inf_{\substack{0\le\tau\le t_n \\ \tau\in I}} x_\tau - u \end{array}$$

Tomamos $\hat{\hat{\varphi}}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}$ definidos en el lema anterior.

$$\begin{aligned} A^n &= \left\{\sup_{\substack{0\le\tau\le t_n \\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau \ge \mathbf{V}\right\} \cap \left\{\inf_{\substack{0\le\tau\le t_n \\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau > \mathbf{U}\right\} \\ &= \left(\left[\varphi_n\left(\mathbf{U},\, \mathbf{V},\, \mathbf{X}\right)\right]^{-1}[0,\infty)\right) \cap \left(\left[\widehat{\varphi_n}\left(\mathbf{U},\, \mathbf{V},\, \mathbf{X}\right)\right]^{-1}(0,\infty)\right) \\ &= \left[(\mathbf{U},\, \mathbf{V},\, \mathbf{X})^{-1}\left(\varphi_n^{-1}[0,\infty)\right)\right] \cap \left[(\mathbf{U},\, \mathbf{V},\, \mathbf{X})^{-1}\left(\widehat{\varphi_n}^{-1}(0,\infty)\right)\right] \\ &= \left[(\mathbf{U},\, \mathbf{V},\, \mathbf{X})^{-1}\left(A_1^n \cap A_2^n\right)\right] \end{aligned}$$

donde $A_1^n = \varphi_n^{-1}[0,\infty)$ y $A_2^n = \widehat{\varphi_n}^{-1}(0,\infty)$

2.

$$\begin{aligned}
D^n &= \left\{ \sup_{\substack{0\leq\tau\leq t_n \\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau < \mathbf{V} \right\} \cap \left\{ \inf_{\substack{0\leq\tau\leq t_n \\ \tau\in I}} \mathbf{X}_\tau \leq \mathbf{U} \right\} \\
&= \big([\varphi_n(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})]^{-1}(-\infty,0) \big) \cap \big([\widehat{\varphi_n}(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})]^{-1}(-\infty,0] \big) \\
&= \big[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1} \big(\varphi_n^{-1}(-\infty,0) \big) \big] \cap \big[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1} \big(\widehat{\varphi_n}^{-1}(-\infty,0] \big) \big] \\
&= \big[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1} (A_3^n \cap A_4^n) \big]
\end{aligned}$$

donde $A_3^n = \varphi_n^{-1}(-\infty,0)$ y $A_4^n = \widehat{\varphi_n}^{-1}(-\infty,0]$

3.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{U} \in B] &= \Big[\widehat{\widehat{\varphi}}(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(B) \Big] \\
&= \Big[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1} \Big(\widehat{\widehat{\varphi}}^{-1}(B) \Big) \Big] \\
&= \big[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(A_2) \big]
\end{aligned}$$

donde $A_2 = \widehat{\widehat{\varphi}}^{-1}(B)$

4.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{V} \in B] &= \Big[\widetilde{\widetilde{\varphi}}(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(B) \Big] = (\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1} \Big(\widetilde{\widetilde{\varphi}}^{-1}(B) \Big) \\
&= \big[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(A_3) \big]
\end{aligned}$$

donde $A_3 = \widetilde{\widetilde{\varphi}}^{-1}(B)$

5.

$$\begin{aligned}
A = \bigcup_n A^n &= \big[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1} \big(\big(A_1^1 \cap A_2^1\big) \cup \big(A_1^2 \cap A_2^2\big) \cup \ldots \big) \big] \\
&= \big[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(A_1) \big]
\end{aligned}$$

donde $A_1 = ((A_1^2 \cap A_2^2) \cup \ldots)$

6.

$$\begin{aligned} D=\bigcup_n D^n &= \left[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}\left(\left(A_3^1\cap A_4^1\right)\cup\left(A_3^2\cap A_4^2\right)\cup\ldots\right)\right] \\ &= \left[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}\left(A_4\right)\right] \end{aligned}$$

donde $A_4=((A_3^1\cap A_4^1)\cup(A_3^2\cap A_4^2)\cup\ldots)$

Juntando todo lo anterior

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left[\mathbf{X_T}\in B\right] &= \mathrm{P}\left[([\mathbf{V}\in B]\cap A)\cup([\mathbf{U}\in B]\cap D)\right] \\ &= \mathrm{P}\left[\left[\left((\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(A_3)\right)\cap\left((\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(A_1)\right)\right]\cup\right. \\ &\cup \left.\left[\left((\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(A_2)\right)\cap\left((\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(A_4)\right)\right]\right] \\ &= \mathrm{P}\left[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}\left((A_3\cap A_1)\cup(A_2\cap A_4)\right)\right] \\ &= \mathrm{P}\left[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})^{-1}(A_B)\right] \end{aligned}$$

donde $A_B=((A_3\cap A_1)\cup(A_2\cap A_4))$. Por tanto

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{X_T}\in B\right]=\mathrm{P}\left[(\mathbf{U},\,\mathbf{V},\,\mathbf{X})\in\ A_B\right]$$

$\square$

Como más adelante nos toparemos con un montón de esperanzas condicionadas, es hora de que definamos la esperanza condicionada.

Definición 2.17 (esperanza condicionada a que $\mathbf{X}=x$)**.** Sean $\mathbf{X}$ definida en $(\Omega,\ \sigma)$ e $\mathbf{Y}$ definida en $(\Omega,\ \sigma,\ \mathrm{P})$ variables aleatorias. Sea $E|\mathbf{Y}|<\infty$, llamaremos esperanza de $\mathbf{Y}$ condicionada a que $\mathbf{X}=x$ a cualquier función medible $g(x)=E(\mathbf{Y}|\mathbf{X}=x)$ satisfaciendo

$$\int_{\mathbf{X}^{-1}(A)}\mathbf{Y}d\mathrm{P}=\int_A g(x)d\mathrm{P}_{\mathbf{X}}(x)\quad\forall\,A\in\ \sigma\{\mathbf{X}\}$$

además, si h es otra función tal entonces

$$\mathrm{P}_{\mathbf{X}}\{x : g(x) = h(x)\} = 1$$

Definición 2.18 (esperanza condicionada a una σ-álgebra)**.** Sean $\mathbf{Y}$ definida en $(\Omega,\ \sigma,\ \mathrm{P})$ integrable y α una σ-álgebra contenida en σ, llamaremos esperanza de $\mathbf{Y}$ condicionada a α a cualquier función integrable $h(\omega) = E[\mathbf{Y}|\alpha](\omega)$ satisfaciendo

$$\int_A \mathbf{Y} d\mathrm{P} = \int_A h d\mathrm{P} \quad \forall\ A \in\ \alpha$$

además, si f es otra de tales funciones

$$\mathrm{P}\{\omega \in\ \Omega : h(\omega) = f(\omega)\} = 1$$

Observación 2.19.

$$E[\mathbf{Y}|\sigma(\mathbf{X})] = E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}]$$

por definición.

Es interesante además tener en cuenta para hacer cálculos la siguiente relación existente entre esperanzas condicionadas

$$E[\mathbf{Y}|\mathbf{X}](\omega) = E[\mathbf{Y}|\mathbf{X} = \mathbf{X}(\omega)]$$

Lema 2.20. *Sea* $\mathbf{X}$ *una v.a. definida en* $(\Omega,\ \sigma,\ P)$ *y* $\alpha \subset \sigma$ *En las condiciones de la definición de esperanza condicionada dada una* σ*-álgebra tenemos que*

$$E(E(\mathbf{X}|\alpha)) = E\mathbf{X}$$

Demostración. Es directo tomando $A = \Omega$ en la definición. □

Lema 2.21. *Sean* $\mathbf{X},\ \mathbf{Y}$ *vectores aleatorios independientes. Sea* $\varphi(x, y)$ *una variable* *aleatoria en el espacio producto* $(\mathbb{R}^2,\ \beta^2)\times(\Omega,\ \sigma)$ *tal que* $E|\varphi(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})| < \infty$*, entonces*

$$E(\varphi(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})|\mathbf{X}=x) \overset{c.s.}{=} E\varphi(x,\ \mathbf{Y})$$

De los cuatro lemas siguientes solo los dos últimos se aplican directamente en la demostración del Teorema. Ánimo, que ya falta menos.

Lema 2.22. $\mathbf{X}^1_t = \mathbf{X}_{t+\tau} - \mathbf{X}_\tau,\ t \geq 0$ *es un movimiento Browniano independiente de* $\sigma\{\mathbf{X}_s :\ s \leq t\}$.

Demostración.

$$\mathbf{X}^1_0 \equiv 0$$

Sean $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n$, $(\mathbf{X}^1_{t_0}, \ldots, \mathbf{X}^1_{t_n})$ tiene una distribución determinada por

$$\mathbf{X}^1_{t_k} - \mathbf{X}^1_{t_{k-1}} = \mathbf{X}_{t_k+\tau} - \mathbf{X}_{t_{k-1}+\tau}$$

son v.a.'s independientes normalmente distribuidas de esperanza cero y varianza $t_k - t_{k-1}$. $\square$

Lema 2.23.

$$\mathbf{T}_1 = \inf\{t :\ \mathbf{X}_t \in (\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1)^c\}$$

$\exists\ \mathbf{T}^n_1 \longrightarrow \mathbf{T}_1$ *de manera que*

$$[\mathbf{T}^n_1 \leq t] \in \sigma\,[\mathbf{X}_s :\ s \leq t;\ \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1]$$

$\mathbf{T}^n_1$ *toma una cantidad finita de valores.*

Demostración.

$$\mathbf{T}^n_1 = \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{si } \frac{k-1}{n} < \mathbf{T}_1 \leq \frac{k}{n},\ k > 1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } 0 \leq \mathbf{T}_1 \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Sea k_0 tal que $\frac{k_0}{n} \leq t < \frac{k_0+1}{n}$

$$\{\mathbf{T}_1 \leq t\} = \left\{\mathbf{T}_1 \leq \frac{k_0}{n}\right\} \in \sigma \left\{\mathbf{X}_s :\ s \leq \frac{k_0}{n};\ \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1\right\}.$$

$\square$

Lema 2.24.

$$\sigma \left\{\mathbf{X}_{t+\tau} - \mathbf{X}_{\tau},\, t \geq 0\right\}\ \textit{independiente de}\ \sigma \left\{\mathbf{X}_s,\, s \leq \tau;\ \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1\right\}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big[\mathbf{X}_{t_1+\tau} - \mathbf{X}_\tau \in A_1, \ldots, \mathbf{X}_{t_j+\tau} - \mathbf{X}_\tau \in A_j,\ \mathbf{X}_{s_1} \in B_1, \ldots \mathbf{X}_{s_i} \in B_i,\\
\mathbf{U}_1 \in H_1,\, \mathbf{V}_1 \in G_1] = \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1+\tau} - \mathbf{X}_\tau \in A_1, \ldots, \mathbf{X}_{s_i} \in B_i\right] \cdot\\
\mathrm{P}\left[\mathbf{U}_1 \in H_1,\, \mathbf{V}_1 \in G_1\right] = \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1+\tau} - \mathbf{X}_\tau \in A_1, \ldots, \mathbf{X}_{t_j+\tau} - \mathbf{X}_\tau \in A_j\right] \cdot\\
\mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{s_1} \in B_1, \ldots \mathbf{X}_{s_i} \in B_i\right] \cdot \mathrm{P}\left[\mathbf{U}_1 \in H_1,\, \mathbf{V}_1 \in G_1\right]\\
= \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1+\tau} - \mathbf{X}_\tau \in A_1, \ldots \mathbf{X}_{t_j+\tau} - \mathbf{X}_\tau \in A_j\right] \cdot\\
\mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{s_1} \in B_1, \ldots, \mathbf{X}_{s_i} \in B_i,\ \mathbf{U}_1 \in H_1,\, \mathbf{V}_1 \in G_1\right]
\end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que $\sigma\left[\mathbf{X}_t,\, t \geq 0\right]$ es independiente de $\sigma[\mathbf{U}_1,\, \mathbf{V}_1]$ y que

$$\sigma\{\sigma_1,\, \sigma_2\} = \sigma\{A \cap B;\ A \in \sigma_1,\, B \in \sigma_2\}$$

$\square$

Lema 2.25. *Sea* $\mathbf{T}_1 = \inf\{t :\ \mathbf{X}_t \in (\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1)^c\}$

$$\mathbf{X}_t^1 = \mathbf{X}_{t+\mathbf{T}_1} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1},\ t \geq 0$$

es un movimiento Browniano independiente de $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}$.

Demostración. Por (2.23) $\exists\ \mathbf{T}_1^n \longrightarrow \mathbf{T}_1,\ \mathbf{T}_1$ toma una cantidad finita de valores

$\{\tau_k^n\}_{1\le k\le k_n}$,

$$[\mathbf{T}_1^n \le t] \in \sigma\left[\mathbf{X}_s:\ s\le t;\ \mathbf{U}_1,\mathbf{V}_1\right]$$

Fijamos n:

$$[\mathbf{T}_1^n = \tau_k^n] = \left\{\bigcap_n \left[\mathbf{T}_1 \le \tau_k - \frac{1}{n}\right]^c\right\} \cap [\mathbf{T}_1 \le \tau_k] \in \sigma\{\mathbf{X}_s:\ 0\le s\le \tau_k^n;\ \mathbf{U}_1,\mathbf{V}_1\}$$

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1+\mathbf{T}_1^n} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1^n} < x_1,\ldots,\mathbf{X}_{t_r+\mathbf{T}_1^n} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1^n} < x_r, \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1^n} < x_{r+1}\right] =$$
$$\sum_k \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1+\tau_k^n} - \mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_1,\ldots,\mathbf{X}_{t_r+\tau_k^n} - \mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_r, \mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_{r+1}, \mathbf{T}_1^n = \tau_k^n\right]$$

Por el lema (2.24) coincide con

$$\sum_k \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1+\tau_k^n} - \mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_1,\ldots,\mathbf{X}_{t_r+\tau_k^n} - \mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_r\right]\cdot \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_{r+1},\ \mathbf{T}_1^n = \tau_k^n\right]$$

Por el lema (2.22) será

$$\sum_k \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1} < x_1,\ldots,\mathbf{X}_{t_r} < x_r\right]\cdot \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_{r+1},\ \mathbf{T}_1^n = \tau_k^n\right]$$

y sacando factor común obtenemos que

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1+\mathbf{T}_1^n} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1^n} < x_1,\ldots,\mathbf{X}_{t_r+\mathbf{T}_1^n} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1^n} < x_r, \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1^n} < x_{r+1}\right] =$$
$$\sum_k \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1+\tau_k^n} - \mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_1,\ldots,\mathbf{X}_{t_r+\tau_k^n} - \mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_r, \mathbf{X}_{\tau_k^n} < x_{r+1}, \mathbf{T}_1^n = \tau_k^n\right] =$$
$$\mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1} < x_1,\ldots,\mathbf{X}_{t_r} < x_r\right]\cdot \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1^n} < x_{r+1}\right] \quad (10)$$

Denotemos $\mathbf{X}_{t\,n}^1 = \mathbf{X}_{t+\mathbf{T}_1^n} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1^n}$. Como $\mathbf{T}_1^m \longrightarrow \mathbf{T}_1$, por la continuidad de las trayectorias $\mathbf{X}^1_{t\,n} \xrightarrow{c.s} \mathbf{X}^1_t$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left[\mathbf{X}^1_{t_1 n} < x_1, \ldots, \mathbf{X}^1_{t_r n} < x_r\right] &\rightarrow \mathrm{P}\left[\mathbf{X}^1{}_{t_1} < x_1, \ldots, \mathbf{X}^1{}_{t_r} < x_r\right] \\
\mathrm{P}\left[\mathbf{X}^1_{t_1 n} < x_1, .., \mathbf{X}^1_{t_r n} < x_r, \mathbf{X}_{\mathbf{T}^m_1} < x_{r+1}\right] &\rightarrow \mathrm{P}\left[\mathbf{X}^1{}_{t_1} < x_1, .., \mathbf{X}^1{}_{t_r} < x_r, \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} < x_{r+1}\right] \\
\mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{\mathbf{T}^n_1} < x_{r+1}\right] &\rightarrow \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} < x_{r+1}\right]
\end{aligned}$$

Pasando al límite en (10)

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{X}^1_{t_1} < x_1, \ldots, \mathbf{X}^1_{t_n} < x_n, \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} < x_{r+1}\right] = \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{t_1} < x_1, \ldots, \mathbf{X}_{t_n} < x_n\right] \cdot \mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} < x_{r+1}\right]$$

De aquí se deduce que $\mathbf{X}^1_t$ es un movimiento Browniano y es independiente de $\mathbf{T}_1$. $\square$

Definición 2.26 (Convergencia en ley en $\mathbb{R}^k$)**.** Sea $\mathbf{X}_n = (\mathbf{X}^{(n)}_1, \ldots, \mathbf{X}^{(n)}_k)$ un vector aleatorio, decimos que $\mathbf{X}_n$ converge en ley a $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_k)$ si para toda f continua y acotada.

$$Ef(\mathbf{X}_n) \longrightarrow Ef(\mathbf{X}),$$

se escribe $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X}$.

Definición 2.27 (Clausura de un conjunto)**.** Para cada $E \subset \mathbb{R}$ definimos la frontera de E como $\partial E = \bar{E} \cap \bar{E^c}$ ($\bar{E}$ =clausura de E).

Lema 2.28. *Sean $\mathbf{Y}_n$, $\mathbf{Y}$ variables aleatorias con $\mathbf{Y}_n \longrightarrow \mathbf{Y}$. Entonces para cada $B \in \beta$ cumpliendo que $P_{\mathbf{Y}}(\partial B) = 0$, se tiene que*

$$P_{\mathbf{Y}_n}(B) \longrightarrow P_{\mathbf{Y}}(B)$$

Lema 2.29. *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall \{a_{n_k}\}_k$ existe una nueva subsucesión de $\{a_{n_k}\}_k$ convergente al punto a. Entonces $a_n \longrightarrow a$*

Proposición 2.30. *Sean $\mathbf{X}$ un movimiento Browniano, $\mathbf{Y}$ una v.a. cumpliendo que $E\mathbf{Y} = 0$. Existen v.a.'s $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ independientes de $\mathbf{X}$ y definidas en el mismo espacio* *probabilístico que* $\mathbf{X}$ *tales que* $\mathbf{X_T} \stackrel{i.d.}{=} \mathbf{Y}$*, donde*

$$\mathbf{T} = \text{ínf}\{t: \ \mathbf{X}_t \notin (\mathbf{U}, \mathbf{V})\}$$

Para una v.a. $\mathbf{Y}$*, cumpliendo que* $E\mathbf{Y} = 0$, $E\mathbf{Y}^2 < \infty$ *existen unas v.a.'s* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *tales que* $\mathbf{X_T} \stackrel{i.d.}{=} \mathbf{Y}$.

Demostración. Supongamos que $\mathbf{Y}$ toma un número finito de valores en puntos $\hat{u}_i \leq 0, \ \hat{v}_j \geq 0$ con probabilidades $\hat{p}_i$ y $\hat{q}_j$ respectivamente.

Existen pares (u_i, v_i) cumpliendo

$$u_i p_i + v_i q_i = 0 \quad u_i \in \{\hat{u}_j\}, \ v_i \in \{\hat{v}_j\}$$

donde pueden existir $i, j \quad i \neq j$ tales que $u_i = u_j$ (lo mismo para v_i). Notemos que no estamos definiendo una probabilidad en $\mathbb{R}$. Sin embargo sí podemos definir una v.a. $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ de la siguiente forma

$$\mathrm{P}\left((\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_i, v_i)\right) = p_i + q_i$$

porque, si bien puede que algunos u_i, v_i sean iguales, como pares son todos distintos, es decir no existe j tal que $(u_i, v_i) = (u_j, v_j)$. Lo que queda para ver que P es una probabilidad en $\mathbb{R}^2$ es

$$\sum_i \mathrm{P}\left((\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_i, v_i)\right) = 1$$

pero es cierto porque

$$\sum_i p_i + q_i = \sum_k \hat{p}_k + \sum_r \hat{q}_r = 1$$

tal como se construyen los pares.

Veamos que

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{X_T} = u_i | (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_i, v_i)\right) = \frac{p_i}{p_i + q_i} \tag{11}$$

1) $u_i p_i + v_i q_i = 0$

2) $\mathrm{P}\left(\mathbf{X_T} = u_i | (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_i, v_i)\right) + \mathrm{P}\left(\mathbf{X_T} = v_i | (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_i, v_i)\right) = 1$

3) Como hemos visto anteriormente

$$E[\mathbf{X_T} | \mathbf{U} = u_i,\ \mathbf{V} = v_i] \stackrel{c.s.}{=} 0$$

$$\hat{\mathrm{P}}_{(u_i, v_i)} = \mathrm{P}[\mathbf{X_T} | (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_i, v_i)]$$

es una probabilidad condicionada discreta y en este caso se cumple que

$$\begin{aligned} E[\mathbf{X_T} | \mathbf{U} = u_i,\ \mathbf{V} = v_i] &= E\hat{\mathrm{P}}_{(u_i, v_i)} \\ &= u_i \mathrm{P}\left(\mathbf{X_T} = u_i | (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_i, v_i)\right) \\ &+ v_i \mathrm{P}\left(\mathbf{X_T} = v_i | (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_i, v_i)\right) = 0 \end{aligned}$$

Usando 1), 2), 3) probamos (11).

Veamos que de lo anterior se sigue que $\mathrm{P}[\mathbf{X_T} = \hat{u}_i] = \hat{p}_i$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}[\mathbf{X_T} = \hat{u}_i] &= \sum_j \mathrm{P}[\mathbf{X_T} = \hat{u}_i | (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_j, v_j)] \mathrm{P}[(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_j, v_j)] \\ &= \sum_{j | u_j = \hat{u}_i} \mathrm{P}[\mathbf{X_T} = \hat{u}_i | (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_j, v_j)] \mathrm{P}[(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_j, v_j)] \\ &= \sum_{j | u_j = \hat{u}_i} \mathrm{P}[\mathbf{X_T} = u_j | (\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_j, v_j)] \mathrm{P}[(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (u_j, v_j)] \\ &= \sum_{j | \hat{u}_i = u_j} \frac{p_j}{p_j + q_j} (p_j + q_j) = \sum_{j | \hat{u}_i = u_j} p_j = \hat{p}_i \end{aligned}$$

La última igualdad se da por la forma de construir los pares. Por tanto $\mathbf{X_T} \stackrel{i.d.}{=} \mathbf{Y}$.

Sea $\mathbf{Y}$ $E\mathbf{Y} = 0$, $E\mathbf{Y}^2 < \infty$. Tomamos $\mathbf{Y}_n$ cumpliendo que $E\mathbf{Y}_n = 0$, $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{Y}$.

Repitiendo el proceso anterior construimos v.a.'s $\mathbf{U}_n$, $\mathbf{V}_n$ y unos tiempos de parada $\mathbf{T}_n$ cumpliendo que $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_n} \stackrel{i.d.}{=} \mathbf{Y}_n$.

Supongamos que $(\mathbf{U}_n,\ \mathbf{V}_n)$ tienen distribución "tight". Por el tma. de Helly-Bray dada $\{F_{(\mathbf{U}_n,\mathbf{V}_n)}\} \subset \mathcal{M}$ existe $F_{(\mathbf{U}_{n_k},\mathbf{V}_{n_k})}$ tal que

$$F_{(\mathbf{U}_{n_k},\mathbf{V}_{n_k})} \xrightarrow{d} F$$

Como $F_{(\mathbf{U}_{n_k},\mathbf{V}_{n_k})}$ es "tight", entonces existe una subsucesión y una v.a. $(\mathbf{U},\mathbf{V})$ tal que

$$(\mathbf{U}_{n_k},\, \mathbf{V}_{n_k}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbf{U},\, \mathbf{V})$$

Tomemos ahora una subsucesión (n_k) y consideremos $\{(\mathbf{U}_{n'_k},\, \mathbf{V}_{n'_k})\}$, lo que acabamos de probar es que existe una subsucesión (n'_k) tal que

$$(\mathbf{U}_{n'_k},\, \mathbf{V}_{n'_k}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbf{U},\, \mathbf{V})$$

es decir

$$Ef(\mathbf{U}_{n'_k},\, \mathbf{V}_{n'_k}) \longrightarrow Ef(\mathbf{U},\, \mathbf{V})$$

para toda f continua y acotada. Entonces por el lema (2.29)

$$Ef(\mathbf{U}_n,\, \mathbf{V}_n) \longrightarrow Ef(\mathbf{U},\, \mathbf{V})$$

por tanto

$$(\mathbf{U}_n,\, \mathbf{V}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\mathbf{U},\, \mathbf{V})$$

Para esas v.a.'s $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y para el tiempo de salida asociado $\mathbf{T}$, para $I \subset (0,\infty)$, por un argumento similar al descrito en el anterior teorema tenemos que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{P}[\mathbf{X}_\mathbf{T} \in I|\mathbf{U},\, \mathbf{V}])\,(\omega) &= \mathrm{P}[\mathbf{X}_\mathbf{T} \in I|\mathbf{U}=u,\, \mathbf{V}=v] = E[\mathbf{I}_{[\mathbf{X}_\mathbf{T}\in I]}|\mathbf{U}=u,\, \mathbf{V}=v] \\
&\overset{c.s.}{=} E[\mathbf{I}_{[\mathbf{X}_{\mathbf{T}_{u,v}}\in I]}] = \mathrm{P}[\mathbf{X}_{\mathbf{T}_{u,v}} \in I] \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} \frac{|u|}{|u|+|v|} & \text{si } v \in I \\ 0 & \text{en otro caso} \end{array} \right\} = g(u,v) \quad \forall\, \omega \in \Omega
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathrm{P}[\mathbf{X_T} \in I|\mathbf{U},\, \mathbf{V}] = \mathbf{I}_{[\omega:\mathbf{V}(\omega)\in I]}\frac{|\mathbf{U}|}{|\mathbf{U}|+|\mathbf{V}|} = g(\mathbf{U},\, \mathbf{V})$$

Del mismo modo

$$\mathrm{P}[\mathbf{X}_{\mathbf{T}_n} \in I|\mathbf{U}_n,\, \mathbf{V}_n] = g(\mathbf{U}_n,\, \mathbf{V}_n)$$

Si $\mathrm{P}\left(\mathbf{Y} \in \partial I\right) = \mathrm{P}\left(\mathbf{V} \in \partial I\right) = 0$. Entonces, aplicando el lema (2.28)

$$\mathrm{P}(\mathbf{Y} \in I) = \lim_n \mathrm{P}(\mathbf{Y}_n \in I),$$

por otro lado

$$\begin{aligned} Eg(\mathbf{U}_n,\, \mathbf{V}_n) &= \sum_{i_n} g(u_{i_n}, v_{i_n})\mathrm{P}[(\mathbf{U}_n,\, \mathbf{V}_n) = (u_{i_n}, v_{i_n})] \\ &= \sum_{i_n} \mathrm{P}[\mathbf{X}_{\mathbf{T}_n} \in I|(\mathbf{U}_n,\, \mathbf{V}_n) = (u_{i_n}, v_{i_n})] \cdot \mathrm{P}[(\mathbf{U}_n,\, \mathbf{V}_n) = (u_{i_n}, v_{i_n})] \\ &= \mathrm{P}[\mathbf{X}_{\mathbf{T}_n} \in I]. \end{aligned}$$

Juntando todo lo anterior

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathbf{Y} \in I) &= \lim_n \mathrm{P}(\mathbf{Y}_n \in I) = \lim_n \mathrm{P}(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_n} \in I) \\ &= \lim_n Eg(\mathbf{U}_n,\, \mathbf{V}_n) = Eg(\mathbf{U},\, \mathbf{V}) \\ &= \mathrm{P}(\mathbf{X_T} \in I) \end{aligned}$$

la última igualdad resulta de aplicar el lema (2.20). La misma prueba sirve para $I \subset (0, -\infty)$. Juntándolo todo tenemos que

$$\mathrm{P}(\mathbf{Y} \in A) = \mathrm{P}(\mathbf{X_T} \in A) \quad \forall\, A \in \beta$$

porque en particular están los intervalos, por tanto $\mathbf{X_T} \stackrel{i.d.}{=} \mathbf{Y}$. $\square$

Por fin, aquí tenemos el

Teorema 2.31 (Representación de Skorokhod). *Dada una sucesión de v.a.i.i.d.* $\{\mathbf{Y}_n\}_n$ *cumpliendo* $E\mathbf{Y}_1 = 0,\ E\mathbf{Y}_1^2 = \sigma^2 < \infty$*, si llamamos* $\mathbf{S}_n = \mathbf{Y}_1 + \cdots + \mathbf{Y}_n$*, existen un espacio de probabilidad, un movimiento Browniano* $\{\mathbf{X}_{\mathbf{t}^*}\}$ *y una sucesión* $\{\mathbf{T}_n\}_n$ *de v.a.i.i.d. y no negativas definidas en el mismo espacio tales que la sucesión* $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}, \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2}, \cdots$*, tiene la misma distribución que* $\{\mathbf{S}_n\}_n$*, y* $E\mathbf{T}_1 = \sigma^2$*.*

Demostración. Sean $(U_n,\, V_n)_n$ una sucesión de v.a.i.i.d.'s y $\mathbf{X}_t$ un movimiento Browniano definidos en el mismo espacio probabilístico tales que $\sigma\,\{\mathbf{X}_t\, :\, t \geq 0\}$ y $\sigma\,\{U_n,\, V_n,\, n = 1, \ldots\}$ son independientes. Esto se consigue tomando como espacio el espacio producto

$$(\Omega,\, \sigma,\, \mathrm{P}) = (\Omega_1 \times \Omega_2,\, \sigma_1 \times \sigma_2,\, \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2)$$

donde $(\Omega_1,\, \sigma_1,\, \mathrm{P}_1)$ es el espacio en el que está definido el movimiento Browniano y $(\Omega_2,\, \sigma_2,\, \mathrm{P}_2)$ es en el que está definida la sucesión $(U_n,\, V_n)_n$.

Supongamos que $\mathbf{U}_n \leq 0 \leq \mathbf{V}_n$. Definimos

$$\mathbf{T}_1 = \text{ínf}\{t : \mathbf{X}_t \in (\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1)^c\}$$

$\mathbf{T}_1$ es una variable aleatoria por el lema (2.3).

Además, $\sigma\{\mathbf{X}_{t+\tau} - \mathbf{X}_\tau,\, t \geq 0\}$ es independiente de $\sigma\{\mathbf{X}_s,\, s \leq t,\, \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1\}$ por el lema (2.24).

Sea $\mathbf{X}_t^1 = \mathbf{X}_{t+\mathbf{T}_1} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1},\ t \geq 0$. Por el lema (2.25) $\mathbf{X}_t^1$ es un movimiento Browniano independiente de $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}$.

Sea $\mathbf{T}_2$ el tiempo de salida de $\mathbf{X}_t^1$ de $(\mathbf{U}_2, \mathbf{V}_2)$, veamos que $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_2}^1$ tiene la misma distribución que $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}$.

Aplicando el lema (2.16)

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} \in\, B\right] = \mathrm{P}\left[\left(\mathbf{U}_1,\, \mathbf{V}_1,\, \mathbf{X}^1\right) \in\, A_B\right]$$

Como

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{X}^1_{\mathbf{T}_2} \in B\right] = \mathrm{P}\left[\left(\mathbf{U}_2, \mathbf{V}_2, \mathbf{X}^1\right) \in\ A_B\right]$$

y como $\mathbf{X} \overset{i.d.}{=} \mathbf{X}^1$, $\mathbf{U}_1 \overset{i.d.}{=} \mathbf{U}_2$, $\mathbf{V}_1 \overset{i.d.}{=} \mathbf{V}_2$ y son independientes entonces $(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1, \mathbf{X})$ y $(\mathbf{U}_2, \mathbf{V}_2, \mathbf{X}^1)$ están i.d.'s. y $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}$ y $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_2}$ tienen la misma distribución. Repitiendo este procedimiento podemos construir variables

$$\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_k} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_{k-1}}$$

independientes e igualmente distribuidas. El truco está en elegir $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$ para que se cumpla que $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}$ tenga la misma distribución que $\mathbf{Y}_1$. Sean $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$, $E|\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}|^2 < \infty$

Veamos que

$$E(\mathbf{X}(\mathbf{T}_1)|\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1) \overset{c.s.}{=} 0,$$

vamos a aplicar el lema (2.21), para ello sea I numerable, denso en $[0, \infty)$. Sean Π_1, Π_2, Z_t dadas por

$$\begin{aligned} &\Pi_1((a,b),x) = a \quad \Pi_2((a,b),x) = b \\ &Z_t((a,b),x) = x_t \end{aligned}$$

Para cada $r, k \in \mathbb{N}$ definimos

$$\begin{aligned} A_r^{k,1} &= \left\{\left[Z_{t_r} < \Pi_1 + \frac{1}{k},\ Z_{t_s} \in \left(\Pi_1 - \frac{1}{k}, \Pi_2 + \frac{1}{k}\right) \text{ si } t_s < t_r\right] \cap [\Pi_2 > \Pi_1]\right\} \\ A_r^{k,2} &= \left\{\left[Z_{t_r} > \Pi_2 - \frac{1}{k},\ Z_{t_s} \in \left(\Pi_1 - \frac{1}{k}, \Pi_2 + \frac{1}{k}\right) \text{ si } t_s < t_r\right] \cap [\Pi_2 > \Pi_1]\right\} \end{aligned}$$

$$\varphi_r = \sum_k Z_{t_r} \mathbf{I}_{A_r^k} \text{ para cada } r \in \mathbb{N}$$

Sean $A^1 = \bigcup_{r,k} A_r^{k,1}$, $A^2 = \bigcup_{r,k} A_r^{k,2}$

$$\varphi = \left(\sup_r \varphi_r\right)[\mathbf{I}_{A^1}] + \left(\text{ínf}_r\, \varphi_r\right)[\mathbf{I}_{A^2}]$$

Si x es una aplicación continua, con $x(0) = 0$, $a < 0$, $b > 0$.

$$\varphi(x) = x_{(\text{ínf}_t\{x_t \notin (a,b)\})}$$

Así que

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}|\mathbf{U}_1,\, \mathbf{V}_1)(\omega) &= E(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}|\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1(\omega),\, \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_1(\omega)) \\ &= E(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}|\mathbf{U}_1 = a,\, \mathbf{V}_1 = b) \overset{c.s.}{=} E(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_{a\,b}}) = 0 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{T}_{a\,b}$ es el tiempo de salida del intervalo (a, b), la última igualdad se obtiene al aplicar el lema (2.10).

Del mismo modo vemos que

$$E(\mathbf{X}^2_{\mathbf{T}_1}|\mathbf{U}_1,\, \mathbf{V}_1) \overset{c.s.}{=} E(\mathbf{T}_1|\mathbf{U}_1,\, \mathbf{V}_1)$$

aplicando de nuevo el lema (2.21), pero esta vez a la aplicación

$$\varphi(x) = x^2_{(\text{ínf}_t\{x_t \notin (a,b)\})}$$

El siguiente paso es probar que

$$E(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}) = 0, \quad E(\mathbf{X}^2_{\mathbf{T}_1}) = E\mathbf{T}_1,$$

para ello haremos uso del lema (2.20)

$$E(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}) = E(E(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}|\mathbf{U}_1,\, \mathbf{V}_1)) = E(0) = 0$$

por otro lado

$$E(\mathbf{X}^2_{\mathbf{T}_1}) = E(E(\mathbf{X}^2_{\mathbf{T}_1}|\mathbf{U}_1,\ \mathbf{V}_1)) = E(E(\mathbf{T}_1|\mathbf{U}_1\,\mathbf{V}_1)) = E(\mathbf{T}_1)$$

De lo anterior se deduce que, si $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} \overset{i.d.}{=} \mathbf{Y}_1$ entonces

$$E\mathbf{Y}_1 = E\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} = 0$$

y

$$\sigma^2 = E\mathbf{Y}_1^2 = E\mathbf{X}^2_{\mathbf{T}_1} = E\mathbf{T}_1.$$

Así que $E\mathbf{Y}_1 = 0$ es una condición necesaria para que existan v.a.'s $\mathbf{U}_1,\ \mathbf{V}_1$ tales que $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}$ tenga la misma distribución que $\mathbf{Y}_1$.

Para ver que es además suficiente, comencemos por observar que si $\mathbf{Y}_1$ toma solo dos valores, entonces aplicando el corolario (2.12) $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} \overset{i.d.}{=} \mathbf{Y}_1$. Esto se puede generalizar para cualquier v.a. $\mathbf{Y}$ cumpliendo que $E\mathbf{Y} = 0$ y $E\mathbf{Y}^2 < \infty$, como veremos en la proposición (2.30).

Por último, veamos que una vez elegidos $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ para que se cumpla $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} \overset{i.d.}{=} \mathbf{Y}_1$,

$$(\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1},\, \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2}, \ldots) \overset{i.d}{=} (\mathbf{S}_1,\, \mathbf{S}_2, \ldots)$$

Si podemos expresar $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_n}$ como suma de v.a.i.i.d.'s $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ tales que $\mathbf{X}_1 \overset{i.d.}{=} \mathbf{Y}_1$, entonces

$$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots) \overset{i.d.}{=} (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n).$$

Tomamos

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \ldots + x_n) \end{array}$$

que es v.a. porque es continua.

Se puede ver que si $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ son dos v.a.'s tales que $\mathbf{X} \overset{i.d.}{=} \mathbf{Y}$ entonces $\varphi(\mathbf{X}) \overset{i.d.}{=} \varphi(\mathbf{Y})$. En nuestro caso

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &= \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} \\
\mathbf{X}_2 &= \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} \\
\dots & \quad \dots \\
\mathbf{X}_n &= \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_n} - \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_{n-1}}
\end{aligned}$$

Como hemos visto, $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ son v.a.i.i.d.'s, sumando todo

$$\mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n = \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_n}$$

y como $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1} \overset{i.d.}{=} \mathbf{Y}_1$ por la elección de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ entonces $\mathbf{X}_1 \overset{i.d.}{=} \mathbf{Y}_1$ y

$$\varphi(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n) \overset{i.d.}{=} \varphi(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)$$

por tanto

$$(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n) \overset{i.d.}{=} (\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1}, \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\mathbf{T}_2}, \dots, \mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots\mathbf{T}_n})$$

□

3. Donsker y los Principios de Invariancia

Definición 3.1 (Convergencia en ley de procesos)**.** Queda por escribir

Lema 3.2. *Sean $\mathbf{X}_n$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}_n$, $\mathbf{Y}$ v.a.'s. Si $\mathbf{X}_n \xrightarrow{c.p} \mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{c.p} \mathbf{Y}$*

$$\mathbf{X}_n\mathbf{Y}_n \xrightarrow{c.p} \mathbf{X}\mathbf{Y}$$

Lema 3.3. *Dadas las v.a.'s $\{\mathbf{X}_n\}$ y $\mathbf{X}$ definidas en el espacio probabilístico (Ω, σ, P),* *son equivalentes*

1. $\lim_n \mathbf{X}_n \overset{c.s}{=} \mathbf{X}$

2. *Para todo* $\epsilon > 0$ *se cumple que*

$$\lim_n P\left[\left\{\sup_{m\geq n} |\mathbf{X}_m - \mathbf{X}| > \epsilon\right\}\right] = 0$$

Teorema 3.4. *Sean* $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots$ *v.a.i.i.d.* $E\mathbf{Y}_1 = 0$, $Var\mathbf{Y}_1 = \sigma^2 < \infty$, $\mathbf{S}_n = \mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n$. *Definimos el proceso* $\mathbf{X}_t^{(n)} = \frac{\mathbf{S}_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}$, $t \in [0,1]$. *Entonces existe para cada n un proceso* $\{\tilde{\mathbf{X}}_t^{(n)}\}$ *que tiene la misma distribución que* $\{\mathbf{X}_t^{(n)}\}$*, definidos ambos en un mismo espacio de probabilidad, y existe una subsucesión* $\{n_k\}$ *para la que*

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \left|\tilde{\mathbf{X}}_t^{(n_k)} - \mathbf{X}_t\right| \xrightarrow{c.s} 0$$

Demostración. Supongamos que $E\mathbf{Y}_1^2 = 1$. Sea (Ω, σ, P) un espacio de probabilidad construido como en el teorema (2.31). Para cada n consideramos el movimiento Browniano $\{\mathbf{X}_t^n = \sqrt{n}\mathbf{X}_{t/n}\}$. Construimos la sucesión $\mathbf{T}_1^{(n)}, \mathbf{T}_2^{(n)}, \ldots$ usando el movimiento $\mathbf{X}_t^n$ como en el teorema (2.31). Entonces la sucesión $\mathbf{S}_k$ tiene la misma distribución que $\mathbf{X}^n_{\mathbf{T}_1^{(n)}+\cdots+\mathbf{T}_k^{(n)}}$. Así pues, el proceso $\{\mathbf{X}_t^{(n)}\}$ tiene la misma distribución que

$$\mathbf{X}_{\frac{\mathbf{T}_1^{(n)}+\cdots+\mathbf{T}_{[nt]+1}^{(n)}}{n}} = \widetilde{\mathbf{X}}_t^{(n)}$$

Como hemos visto en el teorema (2.31), la sucesión $\mathbf{T}_1^{(n)}, \mathbf{T}_2^{(n)}, \ldots$ es una sucesión de v.a.i.i.d. tales que $E\mathbf{T}_1^{(n)} = 1$ (porque $E\mathbf{Y}_1^2 = 1$), y $\mathbf{T}_1^{(n)}$ tienen la misma distribución para todo n por (2.16).

Tomando $k = [nt] + 1$ para cada t, tenemos que por la L.D.G.N.

$$\frac{\mathbf{T}_1^{(n)} + \cdots + \mathbf{T}_k^{(n)}}{k} \xrightarrow{c.p} 1$$

Como

$$t + \frac{1}{n} = \frac{nt+1}{n} \geq \frac{[nt]+1}{n} \geq \frac{nt}{n} = t$$

aplicando la regla del sandwich $\lim_n \frac{[nt]+1}{n} = t$. Utilizando el lema (3.2)

$$\frac{\mathbf{T}_1^{(n)} + \cdots + \mathbf{T}_{[nt]+1}^{(n)}}{n} \xrightarrow{c.p} t$$

si vemos que

$$\mathbf{W}_n = \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{\mathbf{T}_1^{(n)} + \cdots + \mathbf{T}_{[nt]+1}^{(n)}}{n} - t \right| \xrightarrow{c.s} 0$$

Sea $\omega \in A$ y $\epsilon > 0$.

El conjunto $A = \{\omega : W_n(\omega) \longrightarrow 0\}$ tiene probabilidad 1. Sea $\omega \in A$ y $\epsilon > 0$. Por la continuidad de las trayectorias $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$t, t' \in [0,1],\ |t - t'| < \delta \Rightarrow |\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t'}| < \epsilon.$$

Por ser $\omega \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $t \in [0,1]$ entonces

$$\left| \frac{\mathbf{T}_1^{(n)} + \cdots + \mathbf{T}_{[nt]+1}^{(n)}}{n} - t \right| < \delta.$$

Por tanto

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \widetilde{\mathbf{X}}_t^{(n)} - \mathbf{X}_t \right| \xrightarrow{c.s} 0$$

Lo que se puede probar fácilmente es que $\mathbf{W}_n \xrightarrow{c.p} 0$, lo cual es suficiente porque entonces existe una subsucesión $(n_k)_k$ tal que $\mathbf{W}_{n_k} \xrightarrow{c.s} 0$ y habremos demostrado lo que queríamos.

Escribimos $\bar{\mathbf{T}}_k^{(n)} = \mathbf{T}_k^{(n)} - 1$, entonces $E\bar{\mathbf{T}}_k^{(n)} = 0$ y

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_n &= \sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)} + \cdots + \bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{n} + \left(\frac{[nt]+1-nt}{n}\right)\right| \\
&\le \sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)} + \cdots + \bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{n}\right| + \sup_{0\le t\le 1}\frac{[nt]+1-nt}{n}
\end{aligned}$$

Si llamamos $\theta_n(t) = [nt] + 1 - nt$, tenemos que $\theta_n(t) \le 1$ y

$$\mathbf{W}_n = \sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)} + \cdots + \bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{n}\right| + \frac{\widehat{\theta}_n(t)}{n}$$

A partir de ahora no vamos a arrastrar en nuestros cálculos el término $\frac{\widehat{\theta}_n(t)}{n}$ porque al pasar al límite tenderá a cero.

$$\widehat{\mathbf{W}}_n = \sup_{0\le t\le 1}\left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)} + \cdots + \bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{n}\right|$$

Ahora dividimos el intervalo $[0,1]$ en $[0,\epsilon]$ y $[\epsilon,1]$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{W}}'_n &= \left(\epsilon + \frac{1}{n}\right)\sup_{0\le t\le \epsilon}\left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)} + \cdots + \bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{[nt]+1}\right| \\
&\le \left(\epsilon + \frac{1}{n}\right)\sup_{k\ge 1}\left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)} + \cdots + \bar{\mathbf{T}}_k^{(n)}}{k}\right| = \left(\epsilon + \frac{1}{n}\right)M^{(n)}
\end{aligned}$$

La distribución de $M^{(n)}$ es la misma que la de $M^{(1)}$ porque la distribución de $\bar{\mathbf{T}}_s^{(n)}$ es la misma que la de $\bar{\mathbf{T}}_s^{(1)}$. Ahora escribimos

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{W}}''_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sup_{\epsilon\le t\le 1}\left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)} + \cdots + \bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{[nt]+1}\right| \\
&\le \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sup_{k\ge [\epsilon n]+1}\left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)} + \cdots + \bar{\mathbf{T}}_k^{(n)}}{k}\right|
\end{aligned}$$

La desigualdad se da porque $k = [nt] + 1 \ge [\epsilon \cdot n] + 1$. La cota anterior tiene la misma distribución que

$$\sup_{k\geq[\epsilon n]+1}\left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(1)}+\cdots+\bar{\mathbf{T}}_k^{(1)}}{k}\right|$$

porque la distribución de $\bar{\mathbf{T}}_s^{(n)}$ es la misma que la de $\bar{\mathbf{T}}_s^{(1)}$.

Por la L.F.G.N.

$$\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)}+\cdots+\bar{\mathbf{T}}_k^{(n)}}{k}\xrightarrow{c.s}0 \tag{12}$$

así que $\widehat{\mathbf{W}}_n''\xrightarrow{c.p}0$, por el lema (3.3)

$\widehat{\mathbf{W}}_n\leq\widehat{\mathbf{W}}_n'+\widehat{\mathbf{W}}_n''$ porque

si $0\leq t\leq\epsilon$ entonces $\left|\dfrac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)}+\cdots+\bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{n}\right|\leq\left(\epsilon+\dfrac{1}{n}\right)\left|\dfrac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)}+\cdots+\bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{[nt]+1}\right|$

y si $\epsilon\leq t\leq 1$ entonces $\left|\dfrac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)}+\cdots+\bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{n}\right|\leq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left|\dfrac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(n)}+\cdots+\bar{\mathbf{T}}_{[nt]+1}^{(n)}}{[nt]+1}\right|$

Sean $x,\ \epsilon>0$

$$\left\{\widehat{\mathbf{W}}_n'+\widehat{\mathbf{W}}_n''>x\right\}\subseteq\left\{\widehat{\mathbf{W}}_n'>\frac{x}{2}\right\}\cup\left\{\widehat{\mathbf{W}}_n''>\frac{x}{2}\right\}$$

Tomando probabilidades

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n>x\right) &\leq \mathrm{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n'>\frac{x}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n''>\frac{x}{2}\right)\\ &\leq \mathrm{P}\left(\left(\epsilon+\frac{1}{n}\right)M^{(1)}>\frac{x}{2}\right)+\mathrm{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n''>\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

Pasando al límite, como no podemos asegurar que exista $\lim \mathrm{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n>x\right)$ tenemos que tomar límites superiores, y como

$$\underline{\lim}\,\mathrm{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n>x\right)\leq\overline{\lim}\,\mathrm{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n>x\right)$$

si probamos que $\overline{\lim}\,\mathrm{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n>x\right)\leq 0$, los dos límites existirán y serán iguales, por tanto el límite que queremos será cero.

$$\overline{\text{lím}}\, \mathrm{P}\left(\widehat{\mathbf{W}}_n > x\right) \leq \text{lím}\, \mathrm{P}\left(\left(\epsilon + \frac{1}{n}\right) M^{(1)} > \frac{x}{2}\right) = \text{lím}\, \mathrm{P}\left(\epsilon M^{(1)} > \frac{x}{2}\right), \quad \forall\, \epsilon > 0$$

porque $\widehat{\mathbf{W}}''_n \xrightarrow{c.p} 0$. Entonces

$$\overline{\text{lím}}\, \mathrm{P}\left(\widehat{W}_n > x\right) = 0$$

por tanto $\widehat{\mathbf{W}}_n \xrightarrow{c.p} 0$

Veamos ahora que $\widehat{\mathbf{W}}''_n \xrightarrow{c.p} 0$. Por (12) y usando el lema (3.3) tenemos que

$$\text{lím}_m\ \mathrm{P}\left[\left\{\sup_{k \leq m} \left|\frac{\bar{\mathbf{T}}_1^{(1)} + \cdots + \bar{\mathbf{T}}_k^{(1)}}{k}\right| > x\right\}\right] = 0$$

que es lo que queríamos. □

Después de enunciar el anterior teorema nos damos cuenta de la similitud del teorema de representación de sumas de Skorokhod y otro Teorema de Representación de Skorokhod que se da en los cursos básicos de cálculo de probabilidades y que dice lo siguiente

Teorema 3.5 (de Representación de Skorokhod)**.** *Sean* $\{\mathbf{X}_n\}_n$ *una sucesión de v.a.'s reales y* $\mathbf{X}$ *una v.a. real definidas en* (Ω, σ, P) *tales que*

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X},$$

entonces existe un espacio de probabilidades (Ω', σ', P') *y unas v.a.'s* $\mathbf{Y}$, $\{\mathbf{Y}_n\}_n$ *tales que* $P_{\mathbf{X}} = P_{\mathbf{Y}}$, $P_{\mathbf{X}_n} = P_{\mathbf{Y}_n}$ *y*

$$\mathbf{Y}_n \xrightarrow{c.s} \mathbf{Y}$$

El Teorema de Representación de sumas proporciona un proceso $\widetilde{\mathbf{X}_t}^{(n)}$ (y un espacio de probabilidades en el que está definido), que está igualmente distribuido a otro proceso $\mathbf{X}_t^{(n)}$ que es del que partimos inicialmente, para el cual podemos hablar de convergencia casi seguro.

Teorema 3.6 (Donsker)**.** *Sean* $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2, \ldots$ *v.a.i.i.d.* $E\mathbf{Y}_1 = 0$, $Var\mathbf{Y}_1 = \sigma^2 < \infty$, $\mathbf{S}_n = \mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{Y}_n$. *Definimos* $\mathbf{X}_t^{(n)} = \frac{\mathbf{S}_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}$, *entonces*

$$\mathbf{X}_t^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X}_t$$

Donde $\mathbf{X}_t$ *es cualquier proceso con la misma distribución que el movimiento Browniano.*

Demostración. Por el teorema (3.4) existe para cada n un proceso $\{\tilde{\mathbf{X}}_t^{(n)}\}$ que tiene la misma distribución que $\{\mathbf{X}_t^{(n)}\}$, definidos ambos en un mismo espacio de probabilidad, y existe una subsucesión $\{n_k\}$ para la que

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \left|\tilde{\mathbf{X}}_t^{(n_k)} - \mathbf{X}_t\right| \xrightarrow{c.s} 0$$

Entonces $\widetilde{\mathbf{X}}_t^{(n_k)} \xrightarrow{c.s} \mathbf{X}_t$, por tanto $\widetilde{\mathbf{X}}_t^{(n_k)} \xrightarrow{c.p} \mathbf{X}_t$. Como $\{\widetilde{\mathbf{X}}_t^{(n_k)}\}$ tiene la misma distribución que $\{\mathbf{X}_t^{(n_k)}\}$ se sigue que $\mathbf{X}_t^{(n_k)} \xrightarrow{c.p} \mathbf{X}_t$, luego $\mathbf{X}_t^{(n_k)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X}_t$.

Tomemos una subsucesión (n_k) y consideremos el movimiento browniano $\{\mathbf{X}^{(n_k)}\}$, por lo que acabamos de probar existe una subsucesión (n'_k) tal que $\mathbf{X}^{(n'_k)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X}$, es decir,
(aquí es donde hace falta saber cuál es la definición de convergencia de procesos)
Por el lema (2.29) es decir

$$\mathbf{X}_t^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X}_t$$

□

Definición 3.7. D es la clase de las funciones $x(t)$, $0 \leq t \leq 1$, tales que $x(t^-)$, $x(t^+)$ existen para todo $t \in (0,1)$, y $x(t^+) = x(t)$. También, $x(0^+) = x(0)$, $x(1^-) = x(1)$.

Definimos una métrica $\rho\left(x(\cdot), y(\cdot)\right)$ en D por

$$\sup_{0\leq t\leq 1} |x(t) - y(t)|$$

Definición 3.8. Para $H(x(\cdot))$ definida en D, sea G el conjunto de todas las funciones $x(\cdot) \in D$ tales que H es discontinua en $x(\cdot)$ para la métrica ρ. Si existe un conjunto $G_1 \in \beta^{[0,1]}$ tal que $G \subset G_1$ y para un movimiento Browniano normalizado $\{\mathbf{X}_t\}$, $\mathrm{P}\left(\mathbf{X}(\cdot) \in G_1\right) = 0$, llamamos a H B-continua casi seguro.

Teorema 3.9 (Principio de Invariancia)**.** *Sea H definida en D B-continua c.s. Consideramos un proceso del tipo*

$$\mathbf{X}_t^{(n)} = \frac{\mathbf{S}_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}$$

donde las $\mathbf{S}_n$ son sumas de v.a.i.i.d. $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2, \ldots$ con $E\mathbf{Y}_1 = 0,\ E\mathbf{Y}_1^2 = \sigma^2$. Supongamos que las $\mathbf{H}\left(\mathbf{X}^{(n)}(\cdot)\right)$ son variables aleatorias. Entonces

$$\mathbf{H}\left(\mathbf{X}^{(n)}(\cdot)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{H}\left(\mathbf{X}(\cdot)\right),$$

donde $\{X_t\}$ es un movimiento Browniano normalizado.

Observación 3.10. Anteriormente hemos descrito el espacio en el que vamos a definir H, hemos tomado dicho espacio porque necesitamos que en él estén definidos el proceso $\mathbf{X}_t^{(n)}$ y el movimiento Browniano $\mathbf{X}_t$. Las trayectorias del movimiento Browniano son continuas pero las del proceso $\mathbf{X}_t^{(n)}$ no, sino que cumplen otras propiedades como la de ser continua por la derecha, de ahí que hayamos tomado el espacio D con esas características. En [Bil68] el espacio considerado no es D, es el conjunto de las funciones continuas en $[0,1]$, $\mathcal{C}([0,1])$. Por tanto, en ese caso ya no se puede tomar el $\mathbf{X}_t^{(n)}$ definido anteriormente, hay que añadir algo para que las trayectorias del proceso se vuelvan continuas, y habrá un Principio de Invariancia que se pueda aplicar a dicho proceso.

4. Aplicaciones del Principio de Invariancia

4.1. Estadísticos de Kolmogorov-Smirnov

Problema: Estimación de la diferencia entre la distribución empírica (de una muestra) y la teórica.

Definición 4.1 (Función de distribución empírica)**.** Sean $\{\mathbf{X}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ v.a.i.i.d., llamamos función de distribución de la muestra a

$$\hat{\mathbf{F}}_n(x,\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{I}_{(-\infty,x]}\left(\mathbf{X}_k(\omega)\right)$$

$n\hat{\mathbf{F}}_n(x,\omega)$ es la suma de n v.a.i.i.d. Bernouilli $\mathbf{I}_{(-\infty,x]}\left(\mathbf{X}_k(\omega)\right)$, es decir, una caminata aleatoria.

Primera aproximación: L.F.G.N.

$E\hat{\mathbf{F}}_n(x,\omega) = F(x)$, aplicando la L.F.G.N., para un x fijo

$$\hat{\mathbf{F}}_n(x,\omega) \xrightarrow{c.s} F(x)$$

Segunda aproximación: T.C.L.

$Var\hat{\mathbf{F}}_n(x,\omega) = F(x)(1-F(x))$. Para un x fijo tenemos que

$$\sqrt{n}\left(\hat{\mathbf{F}}_n(x,\omega) - F(x)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

donde Z es cualquier v.a. con distribución $N\left(0,\ F(x)(1-F(x))\right)$.

Lo que queremos es estimar la diferencia para todo x. La solución está en considerar el estadístico de Kolmogorov-Smirnov.

Objetivo: Encontrar un estadístico para determinar si los datos de una muestra vienen de cierta distribución continua.

Definición 4.2 (Estadístico de Kolmogorov-Smirnov)**.** Si $\hat{\mathbf{F}}_n(x,\omega)$ es una distribución empírica y $F(x)$ es una distribución continua, llamamos estadístico de Kolmogorov-Smirnov a

$$D_n = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \hat{\mathbf{F}}_n(x,\omega) - F(x) \right|$$

Definición 4.3 (Puente Browniano)**.** Dado un movimiento Browniano $\{\mathbf{X}_t\}$ definido en $[0,1]$, llamamos puente Browniano al movimiento Browniano $\mathbf{B}_t = \mathbf{X}_t - t\mathbf{X}_1$

Bajo la hipótesis nula de que los datos vienen de una distribución conocida $F(x)$, aplicando el Principio de Invariancia tomando

$$H(x) = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t) - tx(1)|$$

(que es continua en D) después de haber reescrito D_n en la forma $D_n = \sqrt{n} \sup_{0 \le t \le 1} \left| \mathbf{X}_t^{(n)} - t\mathbf{X}_1 \right|$ tenemos la siguiente convergencia

$$D_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \sup_{0 \le t \le 1} |B_t|$$

Observación 4.4. Si consideramos $\hat{D}_n = \sup_x \left| \hat{\mathbf{F}}_n(x,\omega) - F(x) \right|$, si los datos de la muestra vienen de una distribución F, por el teorema de Glivenko-Cantelli $\hat{D}_n \xrightarrow{c.s} 0$. Sin embargo, si multiplicamos por $\sqrt{n}$ el límite no es cero sino que es un nº, de lo que se sigue que asintóticamente la convergencia resulta ser como la de $\frac{1}{\sqrt{n}}$

4.1.1. Test de Kolmogorov-Smirnov

H_0: Los datos de la muestra vienen de cierta distribución F.

H_1: Los datos de la muestra no vienen de la distribución F.

La hipótesis nula será rechazada a un nivel de significancia α si $D_n > c_\alpha$. Hemos obtenido c_α de $\mathrm{P}\left(\sup_{0 \le t \le 1} |B_t| \le c_\alpha\right) = 1 - \alpha$

4.2. Distribución límite del máximo de las sumas parciales

Volviendo al juego del lanzamiento de moneda, queremos saber cuál es la probabilidad de que el máximo de las ganancias del jugador sea menor que cierto valor. Para averiguarlo vamos a introducir un principio muy importante en la teoría de caminatas aleatorias que es el Principio de Reflexión. También se usa en la búsqueda de la distribución de la proporción de veces en las que gana el jugador (ley del arcoseno), y que veremos más adelante aunque sin demostración.

Ahora unas definiciones.

Definición 4.5.

Una caminata aleatoria $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots$ determina una trayectoria uniendo los puntos del plano $(i, \mathbf{S}_i)$.

Sea $A = (x, y)$, llamamos A' a su simétrico con respecto al eje de tiempos, es decir, $A' = (x, -y)$.

Lema 4.6 (Principio de Reflexión)**.** *El número de trayectorias de A a B que tocan o cruzan el eje t es igual al número de todas las trayectorias de A' a B*

Figura 1: Principio de Reflexión

Demostración. Sean los puntos como en (figura 1) $A = (A_t, S_{A_t}),\ B = (B_t, S_{B_t})$. Sea

$$T_0 = (S_{A_t},\, S_{A_t+1}, \ldots, S_{B_t})$$

una trayectoria entre A y B tal que $S_T = 0$ y $S_{A_t} > 0, \ldots, S_{T-1} > 0$ ($(T, 0)$ es el primer vértice en el eje t). Entonces

$$\widetilde{T}_0 = (-S_{A_t},\, -S_{A_t+1}, \ldots, S_{T-1},\, 0,\, S_{T+1}, \ldots,\, S_{B_t})$$

es una trayectoria que va de A' a B, $S_T = 0$ y $-S_{A_t} < 0, \ldots, -S_{T-1} < 0$ ($(T, 0)$ es el primer vértice en el eje t).

Tenemos que ver que

$$\begin{array}{rccc} R: & \mathbf{T} & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{T}} \\ & T_0 & \longmapsto & \widetilde{T}_0 \end{array}$$

es una aplicación biyectiva, donde

$$\begin{aligned} T &= \{\text{trayectorias de } A \text{ a } B \text{ que cruzan } t\} \\ \widetilde{T} &= \{\text{trayectorias de } A' \text{ a } B\} \end{aligned}$$

Es aplicación: $\mathbf{T}_0$ determina su imagen de manera única.

Es inyectiva:

$$\begin{aligned} R(\widetilde{T}_0) &= R(\widetilde{T}_1) \\ \left(-S^0_{A_t}, \ldots, S^0_{T-1},\, 0,\, S^0_{T+1}, \ldots,\, S^0_{B_t}\right) &= \left(-S^1_{A_t}, \ldots, S^1_{T-1},\, 0,\, S^1_{T+1}, \ldots,\, S^1_{B_t}\right) \\ \left(S^0_{A_t}, \ldots, S^0_{B_t}\right) &= \left(S^1_{A_t}, \ldots, S^1_{B_t}\right) \end{aligned}$$

Es suprayectiva:

Sea

$$\widetilde{T}_0 = \left(-S^0_{A_t},\, -S^0_{A_t+1}, \ldots,\, 0, \ldots,\, S_{B_t}\right) \in \widetilde{T}$$

entonces

$$T_0 = \left(S^0_{A_t}, \ldots,\, S^0_T, \ldots, S^0_{B_t}\right)$$

por tanto $R(T_0) = \widetilde{T}_0$ □

Lema 4.7. *Sean* $\mathbf{Y}_1,\ \mathbf{Y}_2,\ldots$ *v.a.'s Bernouilli con* $P[\mathbf{Y}_n = 1] = P[\mathbf{Y}_n = -1] = \frac{1}{2}$, $E\mathbf{Y}_n = 0,\ Var\mathbf{Y}_n = 1.$

Demostración. Sea a un entero no negativo, entonces

$$\mathrm{P}\left[\max_{0\le i\le n+1} \mathbf{S}_i \ge a\right] = 2\mathrm{P}\left[\mathbf{S}_n > a\right] + \mathrm{P}\left[\mathbf{S}_n = a\right]$$

Sea $\mathbf{M}_{i+1} = \max_{0\le j\le i+1} \mathbf{S}_j$

$$\Omega = \{\mathbf{S}_{n+1} > a\} \cup \{\mathbf{S}_{n+1} = a\} \cup \{\mathbf{S}_{n+1} < a\} \ \text{ disjuntos}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{M}_{n+1} \ge a\} &= \{\mathbf{M}_{n+1} \ge a,\ \mathbf{S}_{n+1} > a\} \cup \{\mathbf{M}_{n+1} \ge a,\ \mathbf{S}_{n+1} = a\} \\
&\quad \cup \{\mathbf{M}_{n+1} \ge a,\ \mathbf{S}_{n+1} < a\} \\
&= \{\mathbf{M}_{n+1} \ge a,\ \mathbf{S}_{n+1} > a\} \cup \{\mathbf{S}_{n+1} = a\} \cup \{\mathbf{M}_{n+1} \ge a,\ \mathbf{S}_{n+1} < a\} \\
&= \{\mathbf{S}_{n+1} > a\} \cup \{\mathbf{S}_{n+1} = a\} \cup \{\mathbf{M}_{n+1} \ge a,\ \mathbf{S}_{n+1} < a\} \ \text{ disjuntos}
\end{aligned}$$

Por tanto $\mathrm{P}\left[\mathbf{M}_{n+1} \ge a\right] - \mathrm{P}\left[\mathbf{S}_{n+1} = a\right] = \mathrm{P}\left[\mathbf{S}_{n+1} > a\right] + \mathrm{P}\left[\mathbf{M}_{n+1} \ge a,\ \mathbf{S}_{n+1} < a\right]$ Aplicando el Principio de Reflexión (4.6), el número de trayectorias que cumplen que $\mathbf{M}_{n+1} \ge a$ y $\mathbf{S}_{n+1} < a$ es el mismo que el de las que cumplen que $\mathbf{M}_{n+1} \ge a$ y $\mathbf{S}_{n+1} > a$. Si vemos que cada trayectoria tiene la misma probabilidad se sigue que

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{M}_{n+1} \ge a,\ \mathbf{S}_{n+1} < a\right] = \mathrm{P}\left[\mathbf{M}_{n+1} \ge a,\ \mathbf{S}_{n+1} > a\right].$$

Si $T_0 = \left(S_1^0,\ S_2^0,\ldots,S_{n+1}^0\right)$ es una trayectoria

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left[(\mathbf{S}_1,\ \mathbf{S}_2,\ldots,\mathbf{S}_{n+1}) = T_0\right] &= \mathrm{P}\left[\mathbf{S}_1 = S_1^0,\ldots,\mathbf{S}_{n+1} = S_{n+1}^0\right] \\
&= \mathrm{P}\left[\mathbf{Y}_1 = Y_1^0,\ \mathbf{Y}_2 = Y_2^0,\ldots,\mathbf{Y}_{n+1} = Y_{n+1}^0\right] \\
&= \mathrm{P}\left[\mathbf{Y}_1 = Y_1^0\right]\cdots\mathrm{P}\left[\mathbf{Y}_{n+1} = Y_{n+1}^0\right] = \frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

$\square$

Sean $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots$ v.a.i.i.d.'s cumpliendo $E\mathbf{Y}_1 = 0$, $E\mathbf{Y}_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Sea $\mathbf{X}_t^{(n)} = \frac{\mathbf{S}_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}}$, por Donsker existe $\mathbf{X}_t$ movimiento browniano definido en D tal que

$$\mathbf{X}_t^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X}_t$$

Vamos a aplicar el Principio de Invariancia. Sea $H(x) = \sup_{0\le t\le 1} x(t)$, que es una función continua en $D \subset \mathbb{R}^{[0,1)}$, veamos esto. $\sup_{0\le t\le 1} x(t)$ es continua en D (espacio métrico con norma $\rho(x(t), y(t)) = \sup_{0\le t\le 1} |x(t) - y(t)|$) si $\forall\ \epsilon > 0$

$$\exists\ \delta > 0 \text{ t.q si } \sup_{0\le t\le 1} |x(t) - y(t)| < \delta, \text{ entonces } \left|\sup_{0\le t\le 1} x(t) - \sup_{0\le t\le 1} y(t)\right| < \epsilon$$

$H(x) = \sup_{0\le t\le 1} x(t)$ es continua si

$$\sup_{0\le t\le 1} |x(t) - y(t)| < \epsilon \Rightarrow |\sup_{0\le t\le 1} x(t) - \sup_{0\le t\le 1} y(t)| < \epsilon$$

Supongamos que

$$\sup_{0\le t\le 1} x(t) \le \sup_{0\le t\le 1} y(t)$$

entonces

$$x(t_0) \le \sup_{0\le t\le 1} x(t) \le \sup_{0\le t\le 1} y(t), \quad \forall t_0 \in [0,1] \tag{13}$$

$$\text{Si } |x(t_0) - y(t_0)| \le \epsilon \Rightarrow y(t_0) - \epsilon \le x(t_0) \le \sup_{0\le t\le 1} x(t), \quad \forall\ t_0$$

entonces

$$\sup_{0\le t\le 1} y(t) \le \sup_{0\le t\le 1} x(t) + \epsilon. \tag{14}$$

Por (13) y (14)

$$|\sup_{0\le t\le 1} x(t) - \sup_{0\le t\le 1} y(t)| < \epsilon$$

Entonces

$$\sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t$$

pero

$$\sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t^{(n)} = \sup_{0\le t\le 1} \frac{\mathbf{S}_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}} = \max_{0\le t\le 1} \frac{\mathbf{S}_{[nt]+1}}{\sigma\sqrt{n}} = \max_{1\le i\le n+1} \frac{\mathbf{S}_i}{\sigma\sqrt{n}} = \max_{0\le i\le n+1} \frac{\mathbf{S}_i}{\sigma\sqrt{n}}$$

la última igualdad se da porque definimos $\mathbf{S}_0 = 0$. Implica

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{0\le i\le n+1} \mathbf{S}_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t$$

Así que si conocemos la distribución de $\sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t$ conoceremos la distribución límite de $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{0\le i\le n+1} \mathbf{S}_i$

Como el Principio de Invariancia es válido para cualesquiera v.a.i.i.d's $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2, \ldots$ con $E\mathbf{Y}_1 = 0$ y $E\mathbf{Y}_1^2 = \sigma^2 < \infty$, si calculamos la distribución límite para un caso particular de variables cumpliendo las hipótesis anteriores, la tendremos calculada para cualquier sucesión de variables cumpliendo dichas hipótesis.

Sea α un número real no negativo y $a_n = -[-\alpha\sqrt{n}]$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left[\max_{0\le i\le n+1} \mathbf{S}_i \ge \alpha\sqrt{n}\right] &= \mathrm{P}\left[\max_{0\le i\le n+1} \mathbf{S}_i \ge a_n\right] \\ &= 2\mathrm{P}\left[\mathbf{S}_{n+1} > a_n\right] + \mathrm{P}\left[\mathbf{S}_{n+1} = a_n\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Por el T.C.L.

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{S}_{n+1} > a_n\right] \longrightarrow \mathrm{P}\left[\mathbf{Z} > \alpha\right] \quad \mathbf{Z} \text{ es cualquier v.a. } N(0,1) \tag{16}$$

Como $\mathbf{Y}_n$ son Bernouilli, $\mathbf{S}_{n+1}$ sigue una distribución binomial, $\mathrm{P}\left[\mathbf{S}_{n+1} = a_n\right] = \binom{n+1}{a_n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, entonces

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{S}_{n+1} = a_n\right] = \frac{(n+1)n\cdots((n+1)-a_n+1)}{a_n! 2^{n+1}} \longrightarrow 0$$

De (16)

$$\mathrm{P}\left[\max_{0\le i\le n+1} \mathbf{S}_i \ge \alpha\sqrt{n}\right] \longrightarrow 2\mathrm{P}\left[\mathbf{Z} > \alpha\right]$$

así que tiene que ser

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left[\sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t \ge \alpha\right] &= 2\mathrm{P}\left[\mathbf{Z} > \alpha\right] \\
1 - \mathrm{P}\left[\sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t < \alpha\right] &= 2\left(1 - \mathrm{P}\left[\mathbf{Z} \le \alpha\right]\right) \\
\mathrm{P}\left[\sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t < \alpha\right] &= 2\mathrm{P}\left[\mathbf{Z} \le \alpha\right] - 1 = 1 - 2\mathrm{P}\left[\mathbf{Z} > \alpha\right] \\
&= 2\mathrm{P}\left[0 \le \mathbf{Z} \le \alpha\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du
\end{aligned}$$

Ahora

$$\mathrm{P}\left[\max_{0\le i\le n+1} \frac{\mathbf{S}_i}{\sqrt{n}} \le \alpha\right] \longrightarrow \mathrm{P}\left[\sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t \le \alpha\right]$$

por el Principio de Invariancia.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left[\sup_{0\le t\le 1} \mathbf{X}_t \le \alpha\right] &= \mathrm{P}\left[\bigcap_k \left\{\max_{0\le i\le n+1} \frac{\mathbf{S}_i}{\sqrt{n}} < \alpha + \frac{1}{k}\right\}\right] \\
&\overset{A_{k+1}\subset A_k}{=} \lim_k \mathrm{P}\left[\max_{0\le i\le n+1} \frac{\mathbf{S}_i}{\sqrt{n}} < \alpha + \frac{1}{k}\right] \\
&= \lim_k \left[1 - 2\mathrm{P}\left[\mathbf{Z} > \alpha + \frac{1}{k}\right]\right] \\
&= 1 - 2\lim_k \mathrm{P}\left[\mathbf{Z} \ge \alpha + \frac{1}{k}\right] \\
&= 1 - 2\mathrm{P}\left[\mathbf{Z} > \alpha\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du
\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathrm{P}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le i\le n+1} \mathbf{S}_i \le \alpha\right] \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du, \;\; \alpha \ge 0,$$

por tanto

Teorema 4.8. *Si nos encontramos en las hipótesis del Principio de Invariancia*

($\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2, \ldots$ v.a.i.i.d.'s con $E\mathbf{Y}_1 = 0$, $E\mathbf{Y}_1^2 = \sigma^2 < \infty$)

$$P\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \max_{0 \le i \le n+1} \mathbf{S}_i \le \alpha\right] \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\alpha \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du, \quad \alpha \ge 0$$

4.3. Ley del arco-seno

Sean $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots$ las ganancias de un jugador del juego de lanzamiento de moneda. Sea N_n el número de veces en las que el jugador gana en los primeros n lanzamientos

$$N_n = \{\text{número de } k;\ k \le n,\ \mathbf{S}_k > 0\}.$$

La proporción de tiempo en el que el jugador gana en los primeros n lanzamientos es

$$\mathbf{W}_n = \frac{N_n}{n}.$$

¿Existe una distribución límite para W_n y, en caso de que exista, cuál es?

Definamos $\mathbf{Z}_t^{(n)} = \mathbf{S}_{[nt]}$, $t \in [0,1]$. Denotamos a la medida de Lebesgue por l; entonces

$$\mathbf{W}_n = l\{t;\ \mathbf{Z}_t^{(n)} > 0,\ 0 \le t \le 1\}$$

Ahora, $\mathbf{Z}_t^{(n)}$ no converge a nada en ningún sentido, pero por el tma. de Donsker, escribiendo $\mathbf{X}_t^{(n)} = \frac{\mathbf{S}_{[nt]}}{\sqrt{n}}$ tenemos

$$\mathbf{X}_t^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X}_t$$

donde $\mathbf{X}_t$ es un movimiento Browniano normalizado.

Tomando $H(x) =$"medida" de Lebesgue del tiempo en el que el jugador va ganando, tenemos que

$$H(\mathbf{X}^{(n)}) = \mathbf{W}_n = l\{t;\ \mathbf{X}_t^{(n)} > 0,\ 0 \le t \le 1\}$$

y

$$H(\mathbf{X}) = \mathbf{W} = l\{t;\, \mathbf{X}_t > 0,\ 0 \leq t \leq 1\}$$

$\mathbf{W}$ es justamente la proporción de tiempo en el que la partícula del movimiento Browniano se encuentra en el eje positivo durante $[0, 1]$.

Aplicando el Principio de Invariancia

$$\mathbf{W}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{W}$$

Una prueba, basada en la combinatoria, de que en el juego de lanzamiento de moneda la proporción de veces $\mathbf{W}_n$ en las que el jugador gana en los primeros n lanzamientos tiene como distribución límite

$$\text{lím}\, \mathrm{P}\left[\mathbf{W}_n < x\right] = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}$$

4.4. Ley del logaritmo iterado para sumas

Lema 4.9 (Primer lema de Borel-Cantelli)**.** *Sea (Ω, σ, P) un espacio probabilístico. Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \sigma$ tal que $\sum_n P(A_n) < \infty$. Entonces $P\left[\overline{\text{lím}}_n A_n\right] = 0$, donde $\overline{\text{lím}}_n A_n = \bigcap_n \left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$.*

Lema 4.10. *Sean $\{\mathbf{X}_n\}$ v.a.'s reales, $a \in \mathbb{R}$.*

$$\{\overline{\text{lím}}\mathbf{X}_k(\omega) \leq a\} \supset \underline{\text{lím}}\{\omega :\ \mathbf{X}_k(\omega) < a\}$$

Demostración.

$$\underline{\text{lím}}\{\omega :\ \mathbf{X}_k(\omega) < a\} = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} \{\omega :\ \mathbf{X}_k(\omega) < a\}$$

Sea $\omega \in \underline{\text{lím}}\{\omega : \ \mathbf{X}_k(\omega) < a\}$, entonces

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, k \geq n \ \mathbf{X}_k < a$$

$$\exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \sup_{k \geq n} \mathbf{X}_k < a$$

entonces $\text{ínf}_n \left[\sup_{k\geq n} \mathbf{X}_k(\omega)\right] < a$, por tanto $\overline{\text{lím}}\mathbf{X}_k(\omega) < a$. □

Teorema 4.11. *Existe un espacio de probabilidad, un movimiento Browniano definido en él y una sucesión $\widetilde{\mathbf{S}}_n,\ n = 1, \ldots$ con la misma distribución que $\frac{\mathbf{S}_n}{\sigma},\ n = 1, \ldots$ tal que*

$$\frac{\widetilde{\mathbf{S}}_{[t]} - \mathbf{X}_t}{\sqrt{2t \log(\log t)}} \xrightarrow{c.s} 0 \tag{17}$$

cuando $t \to \infty$.

Demostración. Sea $\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$ tal que $E\mathbf{X}_1^2 = \sigma^2$, dividiendo por σ

$$\widetilde{\mathbf{S}_n} = \frac{\mathbf{S}_n}{\sigma} = \frac{\mathbf{X}_1}{\sigma} + \cdots + \frac{\mathbf{X}_n}{\sigma} = \mathbf{Y}_1 + \cdots + \mathbf{Y}_n$$

Ahora $E\mathbf{Y}_1^2 = 1$. Así que podemos aplicar el teorema de Representación de Sumas (2.31) considerando una sucesión de v.a.'s $\{\mathbf{X}_n\}$ tales que $E\mathbf{X}_1^2 = 1$.

Tomamos por tanto $\sigma = 1$, por el teorema (2.31) existe un movimiento browniano $\mathbf{X}_t$ y una sucesión de v.v.a.a. no negativas $\mathbf{T}_1,\ \mathbf{T}_2, \ldots$ con $E\mathbf{T}_1 = 1$ tal que $\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_n},\ n = 1, 2, \ldots$ tiene la misma distribución que $\widetilde{\mathbf{S}_n} = \frac{\mathbf{S}_n}{\sigma},\ n = 1, 2, \ldots$. Luego probar (17) se reduce a probar que

$$\frac{\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_{[t]}} - \mathbf{X}_t}{\varphi(t)} \xrightarrow{c.s} 0$$

con $\varphi(t) = \sqrt{2t \log(\log t)}$. Por la L.F.G.N.

$$\frac{\mathbf{T}_1 + \cdots + \mathbf{T}_{[t]}}{[t]} \xrightarrow{c.s} 1 = E\mathbf{T}_1$$

como $\frac{[t]}{t} \xrightarrow{c.s} 1$ entonces

$$\frac{\mathbf{T}_1 + \cdots + \mathbf{T}_{[t]}}{t} \xrightarrow{c.s} 1 \tag{18}$$

Veamos que para cualquier $\epsilon > 0$, existe una función que toma valores finitos casi seguro $\mathbf{t}_0(\omega)$ tal que para $t \geq \mathbf{t}_0(\omega)$,

$$\mathbf{T}_1 + \cdots + \mathbf{T}_{[t]} \in \left[\frac{t}{1+\epsilon}, t(1+\epsilon)\right].$$

Por (18), $\forall\, \omega \in A$ cjto. de probabilidad 1 , $\exists\, \mathbf{t}_0$, v.a. tal que $\forall\, \delta > 0$

$$(1-\delta)t < (1+\delta)t \quad \forall\ t \geq \mathbf{t}_0(\omega)$$

Si llamamos $\delta_1 = 1 - \frac{1}{1+\epsilon}$, sea $\delta = \min(\delta_1,\, \epsilon)$, entonces $\frac{1}{1+\epsilon} < 1 - \delta$ y $1 + \delta < 1 + \epsilon$, de donde se sigue el resultado.

Sea

$$\mathbf{M}(t) = \sup_{\frac{t}{1+\epsilon} \leq \tau \leq (1+\epsilon)t} |\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t|$$

Sea $t_k = (1+\epsilon)^k$, y $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, entonces si $\frac{t}{1+\epsilon} \leq \tau \leq (1+\epsilon)t$

$$t_{k-1} = (1+\epsilon)^{k-1} = \frac{(1+\epsilon)^k}{1+\epsilon} \leq \tau \leq (1+\epsilon)^{k+1}(1+\epsilon) = (1+\epsilon)^{k+2} = t_{k+2}$$

Por tanto

$$\mathbf{M}(t) \leq \sup_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_{k+2}} |\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t|.$$

Ahora

$$\begin{aligned} \sup_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_{k+2}} |\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_t| &\leq \sup_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_{k+2}} \left|\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_{k-1}}\right| + \sup_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_{k+2}} \left|\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t_{k-1}}\right| \\ &\leq 2 \sup_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_{k+2}} \left|\mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_{k-1}}\right| \end{aligned}$$

La última desigualdad es porque $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Luego definiendo

$$\mathbf{M}_k = \sup_{t_{k-1} \leq \tau \leq t_{k+2}} \left| \mathbf{X}_\tau - \mathbf{X}_{t_{k-1}} \right|.$$

obtenemos $M(t) \leq 2M_k$.

Como $t_k \leq t$ y φ es creciente

$$\overline{\lim_k} \frac{\mathbf{M}(t)}{\varphi(t)} \leq 2 \overline{\lim_k} \frac{\mathbf{M}_k}{\varphi(t_k)}.$$

$[t_{k-1}, t_{k+2}]$ es compacto, así que podemos cambiar sup por máx (porque las trayectorias del movimiento browniano son continuas).

Por (2.7)

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_k > x\right) \leq 2\mathrm{P}\left(\left|\mathbf{X}_{t_{k+2}} - \mathbf{X}_{t_{k-1}}\right| > x\right)$$

Tomando $\delta = (1+\epsilon)^2 - (1+\epsilon)^{-1}$ tenemos que $t_{k+2} - t_{k-1} = \delta t_k$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_k \geq \sqrt{2\delta}\varphi(t_k)\right) &\leq 2\mathrm{P}\left(\frac{\left|\mathbf{X}_{t_{k+2}} - \mathbf{X}_{t_{k-1}}\right|}{\sqrt{t_{k+2} - t_{k-1}}} \geq 2\sqrt{\log(\log t_k)}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{2\sqrt{\log(\log t_k)}}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx \\
&\leq \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{\log(\log t_k)}} \int_{2\sqrt{\log(\log t_k)}}^{\infty} x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{\log(\log t_k)}} \exp\left(-2\log(\log t_k)\right) \\
&= \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{k^2 \log^2(1+\epsilon)\sqrt{\log(k\log(1+\epsilon))}}
\end{aligned}$$

Como

$$\sqrt{\log(k\log(1+\epsilon))} \geq 1$$

a partir de cierto k entonces

$$\mathrm{P}\left(\mathbf{M}_k \geq \sqrt{2\delta}\varphi(t_k)\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2 \log^2(1+\epsilon)}.$$

Vamos a aplicar Borel-Cantelli (4.9), podemos hacerlo porque

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\log^2(1+\epsilon)} \sum_k \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Llamamos A_k a los conjuntos $\{\omega : \mathbf{M}_k \geq \sqrt{2\delta}\varphi(t_k)\}$

$$\mathrm{P}\left[\overline{\lim_k} A_k\right] = 0 \Longrightarrow \mathrm{P}\left[\underline{\lim_k} A_k^c\right] = 1.$$

porque

$$\left(\overline{\lim_k} A_k\right)^c = \left(\bigcap_n \bigcup_{k \geq n} A_k\right)^c = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k^c = \underline{\lim_k} A_k^c.$$

Aplicando el lema (4.10)

$$\overline{\lim_k} \frac{\mathbf{M}_k}{\varphi(t_k)} \overset{c.s.}{\leq} \sqrt{2\delta}$$

Como $\mathbf{T}_1 + \cdots + \mathbf{T}_{[t]}$ es uno de los τ en $\mathbf{M}_k$

$$\left|\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1 + \cdots + \mathbf{T}_{[t]}} - \mathbf{X}_t\right| \leq \mathbf{M}(t)$$

entonces

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \frac{\left|\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1 + \cdots + \mathbf{T}_{[t]}} - \mathbf{X}_t\right|}{\varphi(t)} &\leq \overline{\lim} \frac{\mathbf{M}(t)}{\varphi(t)} \\ &\leq 2\overline{\lim} \frac{\mathbf{M}_k}{\varphi(t_k)} \overset{c.s.}{\leq} \sqrt{8\delta} \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon \longrightarrow 0$, entonces $\delta \longrightarrow 0$, por tanto

$$\overline{\text{lím}}\frac{\left|\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_{[t]}} - \mathbf{X}_t\right|}{\varphi(t)} \stackrel{c.s.}{=} 0$$

como $\underline{\text{lím}} \leq \overline{\text{lím}}$

$$\text{lím}\,\frac{\left|\mathbf{X}_{\mathbf{T}_1+\cdots+\mathbf{T}_{[t]}} - \mathbf{X}_t\right|}{\varphi(t)} \stackrel{c.s.}{=} 0$$

$\square$

Bibliografía

[Bil68] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures.* John-Wiley & Sons, 1968.

[Bre92] Leo Breiman. *Probability.* Siam, 1992.

[Fel68] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.*, volume Vol. I. John-Wiley & Sons, 1968.

[Maj78] Péter Major. On the Invariance Principle for Sums of Independent Identically Distributed Random Variables. *Journal of multivariate analysis*, (nº 8):págs. 487–517, 1978.

[Saw74] Stanley Sawyer. The Skorokhod Representation. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, Vol. 4(nº 3), Verano 1974.